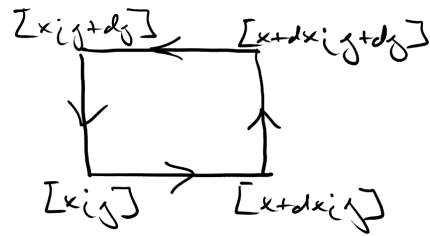


Greenova věta

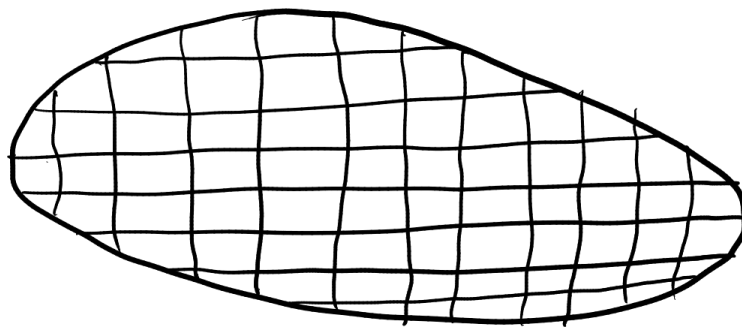


I Představme si, že chceme integrovat po malém obdélníčku o velikosti $dx \times dy$. Začínáme v levém dolním bodě se souřadnicemi $[x; y]$ a obějdeme obdélníček jednou proti směru hodin, tak, jak je to vyznačeno na obrázku.

1. Zapište $\oint (P(x, y) dx + Q(x, y) dy)$ jako součet čtyř integrálů po jednotlivých stranách obdélníčku.
2. Dejte k sobě vždy dva a dva integrály po rovnoběžných stranách.
3. Jelikož je obdélníček velmi malý, můžeme aproximovat P i Q diferenciálem. Proveďte to a integrály dopočítejte (mělo by to vyjít fakt jednoduše).
4. **Doplňte:** $\oint (P dx + Q dy) = \left(\quad \quad \quad \right) dx dy$.

2 V následujícím obrázku je nějaká oblast, kterou jsem rozdělil na hromadu malých čtverečků. Řekněme, že po každém takovém malinkém čtverečku vyčíslíme $\oint (P dx + Q dy)$ zcela stejně jako v předchozí úloze.

1. Všechny čtverečky se obíhají proti směru hodin. Vyznačte v obrázku dovnitř každého čtverečku šipky, které vyznačí, jak se ten čtvereček obíhá. Nemusíte to dělat pro všechny čtverečky, ale chtělo by jich to relativně hodně.
2. Na základě Vašich šipeček vysvětlíte, co se stane s vnitřními stranami všech čtverečků (tedy s těmi, které přiléhají k jinému čtverečku).
3. Co se stane s těmi stranami čtverečků, které jsou na hranici vyznačené oblasti (a tudíž nepřiléhají k jinému čtverečku)?
4. Sečteme-li příspěvky od všech čtverečků, dostaneme na jednu stranu $\iint \left[\oint P d\tilde{x} + Q d\tilde{y} \right] dx dy$. Z úvah v předchozím bodě vysvětlíte, jak to lze napsat jiným způsobem (kde Vám v obrázku zůstanou šipky, které se nezruší?) Dosadte za $\oint \dots$ vyčíslení z první úlohy. Měli byste obdržet *Greenovu větu*.



3 Vyčíslíte pomocí Greenovy věty následující integrály: 1. $\oint (xy^2 dx - x^2y dy)$ po kružnici $x^2 + y^2 = a^2$; 2. $\oint (x + y) dx - (x - y) dy$ po elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4 Vyčíslíte křivkový integrál $\int (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$ po půloblouce kružnice $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$), který procházíme proti směru hodinových ručiček. Jelikož tento integrál není po uzavřené křivce, nejde na něj hned Greenova věta použít. Uzavřete však integrační cestu nějak vhodně a použijte Greenovu větu potom.