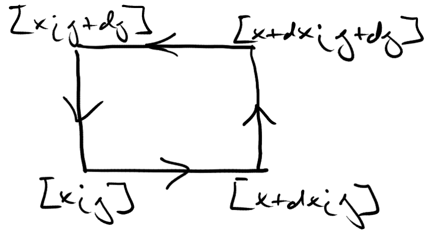
Greenova věta



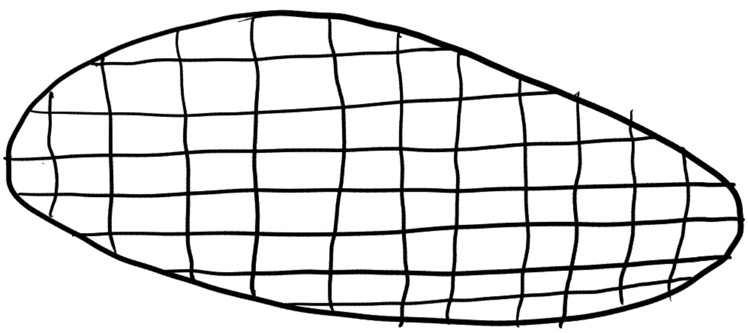
1 Představme si, že chceme integrovat po malém obdélníčku o velikosti $\mathrm{d}x \times \mathrm{d}y$. Začínáme v levém dolním bodě se souřadnicemi $[x; y]$ a obejdeme obdélníček jednou proti směru hodin, tak, jak je to vyznačeno na obrázku.

1. Zapište $\oint (P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y)$ jako součet čtyř integrálů po jednotlivých stranách obdélníčku.
2. Dejte k sobě vždy dva a dva integrály po rovnoběžných stranách.
3. Jelikož je obdélníček velmi malý, můžeme aproximovat P i Q diferenciálem. Proveďte to a integrály dopočítejte (mělo by to vyjít fakt jednoduše).

4. Doplňte: $\oint (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = \Bigg(\qquad\qquad\qquad \Bigg)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

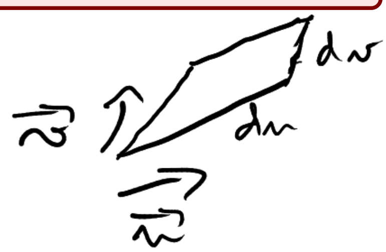
2 V následujícím obrázku je nějaká oblast, kterou jsem rozdělil na hromadu malých čtverečků. Řekněme, že po každém takovém malinkém čtverečku vyčíslíme $\oint (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y)$ zcela stejně jako v předchozí úloze.

1. Všechny čtverečky se obíhají proti směru hodin. Vyznačte v obrázku dovnitř každého čtverečku šipky, které vyznačí, jak se ten čtvereček obíhá. Nemusíte to dělat pro všechny čtverečky, ale chtělo by jich to relativně hodně.
2. Na základě Vašich šipeček vysvětlete, co se stane s vnitřními stranami všech čtverečků (tedy s těmi, které přiléhají k jinému čtverečku).
3. Co se stane s těmi stranami čtverečků, které jsou na hranici vyznačené oblasti (a tudíž nepřiléhají k jinému čtverečku)?
4. Sečteme-li příspěvky od všech čtverečků, dostaneme na jednu stranu $\iint \left[\oint P\,\mathrm{d}\tilde{x} + Q\,\mathrm{d}\tilde{y} \right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Z úvah v předchozím bodě vysvětlete, jak to lze napsat jiným způsobem (kde Vám v obrázku zůstanou šipky, které se nezruší?) Dosaďte za $\oint \cdots$ vyčíslení z první úlohy. Měli byste obdržet *Greenovu větu.*



Stokesova věta

Budeme pokračovat tím, že Greenovu větu ještě „zvedneme“ tak, aby fungovala nejen v rovině, ale v jakékoli ploše ve 3-D prostoru.



3 Řekněme, že zase obcházíme malý obdélníček stejně jako v první úloze, ale tentokrát ten obdélníček bude libovolně natočený. Jeho strany budou ve směru jednotkových, navzájem kolmých vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, jednotková normála ke čtverečku je tedy $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.
1. u a v také vymezují pravoúhlou souřadnou soustavu, stejně jako x

a y, lze tedy použít výsledek první úlohy. Napište, jak dopadne integrál $\oint[(P(u,v)\,\mathrm{d}u + Q(u,v)\,\mathrm{d}v]$ v souřadnicích u, v.

2. P a Q jsou projekce $\boldsymbol{F}$ do směrů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Napište je tedy jako vhodný skalární součin $\boldsymbol{F}$ s nějakými vektory. Derivaci $\frac{\partial}{\partial u}$ zapište jako směrovou derivaci: $\boldsymbol{u} \cdot \mathbf{grad}$, a podobně pro $\frac{\partial}{\partial v}$.

3. Přesvědčte se, že získaný výraz je *lineární* v $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Také se ubezpečte, že když místo $\boldsymbol{u}$ dosadíte $\boldsymbol{v}$ a místo $\boldsymbol{v}$ dáte $-\boldsymbol{u}$, výraz se vůbec nezmění.

4. Z faktů v minulém bodě vydedukujte, že pokud čtvereček otáčíme kolem osy dané normálou, hodnota integrálu se vůbec nezmění. (Když jsme ho otočili o 90°, nezměnilo se nic, a pokud o otočíme o míň, můžeme nové vektory $\boldsymbol{u}'$ a $\boldsymbol{v}'$ napsat jako lineární kombinaci těch starých.)

5. Zapište $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u}$ a přesvědčte se, že výraz je lineární v $\boldsymbol{n}$.

6. Už jsme se přesvědčili, že hodnota integrálu záleží jenom na normále a ne na konkrétním natočení čtverečku, a navíc je to v normále lineární. Proto udělejte toto: zapište třikrát výsledek první úlohy, poprvé v souřadnicích y a z (tomu odpovídá směr normály x), pak v z a x (tomu odpovídá směr normály y) a nakonec v x a y (tomu odpovídá normála podél z). Je-li tedy $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$, lze výsledek díky linearitě napsat jako $n_x \cdot$ (první výsledek) $+\, n_y \cdot$ (druhý výsledek) $+\, n_z \cdot$ (třetí výsledek).

7. Pokud to v tom ještě nevidíte, napište si výraz $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ a ukažte, že se rovná tomu, co Vám vyšlo.

4 Použijte stejnou logiku jako v druhé úloze a s pomocí předchozího vztahu napište, jak to dopadne, jestliže vezmeme jakoukoli ohraničenou plochu v prostoru, rozpitváme ji na čtverečky, po každém vyčíslíme $\oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ a výsledky zintegrujeme přes celou plochu (viz obrázek). Měli byste dostat *Stokesovu větu.*