Odpovědi k trikům

Papírek s derivováním

$\boxed{1}$ $\dfrac{(-1)^n n!}{\alpha^{n+1}}$.

$\boxed{2}$ $\dfrac{1}{(n-1)!}\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{2}\cdots\dfrac{2n-1}{2}\dfrac{\pi}{2a^{n+\frac{1}{2}}} = \dfrac{n\pi}{a^{n+\frac{1}{2}}}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}$.

$\boxed{3}$ **Ad 1.** $\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\alpha b}$; **Ad 2.** $\frac{\pi}{4b^2}\mathrm{e}^{-\alpha b}\left(\frac{1}{b}+\alpha\right)$; **Ad 3.** Tady se hodí rozepsat $\sin^2 \alpha x = \frac{1-\cos 2\alpha x}{2}$. Pak dostaneme $\frac{\pi}{4b}\left(1-\frac{1}{b}\mathrm{e}^{-2\alpha b}\right)$. **Ad 4.** Využijeme toho, že $\dfrac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \dfrac{1}{b^2-a^2}\left(\dfrac{1}{x^2+a^2}-\dfrac{1}{x^2+b^2}\right)$. Tím se integrál rozpadne na rozdíl dvou takových, které už známe, a máme $\dfrac{\pi/2}{b^2-a^2}\left(\dfrac{1}{a\mathrm{e}^{\alpha a}}-\dfrac{1}{b\mathrm{e}^{\alpha b}}\right)$.

$\boxed{4}$ **Ad 1.** Je-li $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+a^2)}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x$, pak $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} = \displaystyle\int_0^\infty \frac{2a\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{b(a+b)}$. Integrací podle a dostaneme $I = \frac{\pi}{b}\ln(a+b) + C$. Teď spočteme $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right)\frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$, v druhém integrálu dáme $x = 1/u$ a zjistíme, že je to 0. Pak spočítáme $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x^2+b^2} = \frac{1}{b}\int_0^\infty \frac{\ln\frac{x}{b}+\ln b}{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2}\frac{\mathrm{d}x}{b}$, což s užitím předchozího výsledku dá $\frac{\pi}{2b}\ln b$. Proto $I = \frac{\pi}{b}\ln(a+b) + C$ musí být při $a = 0$ rovno $\frac{\pi}{b}\ln b$, a tedy $C = 0$. Výsledek: $I = \frac{\pi}{b}\ln(a+b)$.

Ad 2. …

Ad 3. Je-li $I = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2-b/x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2\sqrt{ab}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\sqrt{a}x-\sqrt{b}/x)^2}\,\mathrm{d}x$. Zjistíme $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}b} = -\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2-b/x^2}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

Proto

$$\sqrt{a}I - \sqrt{b}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}b} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\sqrt{a}x-\sqrt{b}/x)^2}\left(\sqrt{a}+\frac{\sqrt{b}}{x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

V posledním integrálu už lze položit $\sqrt{a}x - \sqrt{b}/x = u$, po čemž integrál přejde na $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-u^2} = \sqrt{\pi}$. Máme tedy rovnici

$$\sqrt{b}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}b} = \sqrt{a}I - \mathrm{e}^{-2\sqrt{ab}}\sqrt{\pi}.$$

Tu vyřešíme třeba variací konstant a dostaneme řešení $I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-2\sqrt{ab}} + D\mathrm{e}^{2\sqrt{ab}}$. Při $b = 0$ musíme dostat integrál z gaussovky, tedy $\sqrt{\pi}/2$. Z toho je vidět, že $D = 0$ a $I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-2\sqrt{ab}}$.

Papírek s integrací

$\boxed{1}$ $\ln\frac{b}{a}$. U arkustangenty vyjde $\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}$.

$\boxed{2}$ **Ad 1.** Prostě integrujeme ten integrál ze zadání podle x, dostaneme $\ln\frac{1+b}{1+a}$. **Ad 2.** **Ad 3.** Uvědomíme si, že $x^{-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ln x} = \cos(-\ln x) + \mathrm{i}\sin(-\ln x)$, takže stačí spočítat $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{b-\mathrm{i}}-x^{a-\mathrm{i}}}{\ln x}\,\mathrm{d}x =$

$= \ln \dfrac{1 + b - \mathrm{i}}{1 + a - \mathrm{i}}$. Po oddělení reálné a imaginární části dostaneme $\displaystyle\int_0^1 \cos(-\ln x)\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \ln\sqrt{\frac{b^2 + 2b + \ldots}{a^2 + 2a + \ldots}}$

a $\displaystyle\int_0^1 \sin(-\ln x)\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \operatorname{arc\,tg} \frac{b - a}{ab + a + b + 2}$.

$\boxed{3}$ Vyjde $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a$.

$\boxed{4}$ **Ad 1.** Jelikož $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}y}{1 + (y \operatorname{tg} x)^2} = \frac{\operatorname{arc\,tg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}$, je náš integrál roven $\displaystyle\int_0^a \mathrm{d}y \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1 + y^2 \operatorname{tg}^2 x} =$

$$= \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{(1 + u^2)(1 + y^2u^2)} = \frac{\pi}{2} \ln(1 + a).$$

Ad 2. Využijeme toho, že $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^{-ax^2} - \mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2} = \int_a^b \mathrm{e}^{-yx^2}\,\mathrm{d}y$. Díky tomu je náš integrál roven $\frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}$.

Ad 3. Zase využijeme téhož poznatku jako v minulém bodě a dostaneme výsledek $2\sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a})$.

Ad 4. Z první úlohy tohoto papírku máme $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln \frac{b}{a}$, takže je jistě též

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha - \mathrm{i}a)x} - \mathrm{e}^{-(\alpha - \mathrm{i}b)x}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln \frac{\alpha - \mathrm{i}b}{\alpha - \mathrm{i}a}$. Oddělením reálné části dostaneme výsledek $\ln\sqrt{\dfrac{\alpha^2 + b^2}{\alpha^2 + a^2}}$.

Odpovědi k integrálům s gammou

První papírek

$\boxed{5}$ **Ad 1.** $\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$;

Ad 2. $\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{2\Gamma(a+b)}$.

$\boxed{6}$ **Ad 1.** $\dfrac{\Gamma^2(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)} = \dfrac{\pi}{8}$.

Ad 2. $\dfrac{\Gamma(3+\frac{1}{2})\Gamma(2+\frac{1}{2})}{2\Gamma(6)} = \dfrac{45\pi}{2^6 \cdot 5!} = \dfrac{3\pi}{512}$;

Ad 3. $\dfrac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})\Gamma(\frac{1-\alpha}{2})}{2\Gamma(1)} = \dfrac{\pi}{2\cos\frac{\pi\alpha}{2}}$. Všimněte si, že to funguje jen při $|\alpha| < 1$; jinak ten integrál diverguje.

Ad 4. Po substituci $x = \operatorname{tg} u$ to přejde na integrál předchozího bodu, takže zase dostaneme $\dfrac{\pi}{2\cos\frac{\pi\alpha}{2}}$.

Ad 5. Dole potřebujeme vyrobit $(1+x^2)^\lambda$, tak vytkneme a a položíme $x = \frac{a^{1/\beta}}{b^{1/\beta}} u^{2/\beta}$. Pak ještě dáme $u = \operatorname{tg} z$ a užijeme $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 z} = \cos^2 z$. Výsledek: $\dfrac{1}{\beta} \dfrac{a^{\frac{\alpha+1}{\beta}-\lambda}}{b^{\frac{\alpha+1}{\beta}}} \dfrac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{\beta})\Gamma(\lambda - \frac{\alpha+1}{\beta})}{\Gamma(\lambda)}$.

Ad 6. Klademe $x = u^{1/m}$, vyjde $\dfrac{1}{m} \dfrac{\Gamma(\frac{1}{m})\Gamma(1-\frac{1}{n})}{\Gamma(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{n})}$.

Ad 7. Podle bodu 4 je $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{2\alpha-1}\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2\sin\pi\alpha}$. Položíme v tom $x = \sqrt{u}$ a máme $\displaystyle\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u}{1+u} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$. Derivujeme podle α a máme výsledek $-\frac{\pi^2\cos\pi\alpha}{\sin^2\pi\alpha}$.

Druhý papírek

$\boxed{1}$ $\displaystyle\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$. $\displaystyle\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

$\boxed{2}$ **Ad 1.** $\dfrac{\Gamma(\alpha)}{a^\alpha}$; **Ad 2.** $\dfrac{\Gamma(\frac{1}{\lambda})}{\lambda}$; **Ad 3.** $\dfrac{\Gamma(\frac{\alpha}{\lambda})}{\lambda a^{\alpha/\lambda}}$;

Ad 4. Ad 5. V předchozím výsledku místo a napíšeme $a - \mathrm{i}b$, kde $a \geq 0$ a b je jakékoli reálné. Z toho máme $\displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-ax^\lambda}(\cos bx^\lambda + \mathrm{i}\sin bx^\lambda)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{(a^2+b^2)^{\alpha/2\lambda}} \exp\left(\mathrm{i}\frac{\alpha}{\lambda}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)$. Oddělením reálné a imaginární části dostaneme pro bod 4. $\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\Gamma(\frac{\alpha}{\lambda})}{(a^2+b^2)^{\alpha/2\lambda}}\cos\left(\dfrac{\alpha}{\lambda}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{a}\right)$ a pro bod 5. totéž, jen je tam sinus místo kosinu.

Ad 6. Klademe $x = \mathrm{e}^{-u}$, výsledek je $\Gamma(\lambda+1)$. Takže např. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-\ln x}} = \sqrt{\pi}$.