1 Vyčíslete integrál $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2a-1}y^{2b-1}\mathbf{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dvěma způsoby: jednou v kartézských, podruhé v polárních souřadnicích. Tím spočtěte: **1.** $\displaystyle\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2a-1}x\cos^{2b-1}x\,\mathrm{d}x$.

2 Vyčíslete: **1.** $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^6 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\mathrm{tg}^\alpha x\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^\alpha\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$; **5.** $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^\alpha\,\mathrm{d}x}{(a+bx^\beta)^\lambda}$; **6.** $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^m}}$; **7.** $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}\ln x\,\mathrm{d}x}{1+x}$.

---

1 Pomocí per partes dokažte, že $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$. Vyčíslete $\Gamma(1)$ a $\Gamma(\frac{1}{2})$. Z těchto výsledků nakonec vydedukujte, že $\Gamma(n)=(n-1)!$ a $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{2n-1}{2}\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.

2 Vyčíslete: **1.** $\displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathbf{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int_0^\infty\mathbf{e}^{-x^\lambda}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathbf{e}^{-ax^\lambda}\,\mathrm{d}x$;

4. $\displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathbf{e}^{-ax^\lambda}\cos bx^\lambda\,\mathrm{d}x$; **5.** $\displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathbf{e}^{-ax^\lambda}\sin bx^\lambda\,\mathrm{d}x$; **6.** $\displaystyle\int_0^1(-\ln x)^\lambda\,\mathrm{d}x$.

---

1 Vyčíslete integrál $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2a-1}y^{2b-1}\mathbf{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dvěma způsoby: jednou v kartézských, podruhé v polárních souřadnicích. Tím spočtěte: **1.** $\displaystyle\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2a-1}x\cos^{2b-1}x\,\mathrm{d}x$.

2 Vyčíslete: **1.** $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^6 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\mathrm{tg}^\alpha x\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^\alpha\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$; **5.** $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^\alpha\,\mathrm{d}x}{(a+bx^\beta)^\lambda}$; **6.** $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^m}}$; **7.** $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}\ln x\,\mathrm{d}x}{1+x}$.

---

1 Pomocí per partes dokažte, že $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$. Vyčíslete $\Gamma(1)$ a $\Gamma(\frac{1}{2})$. Z těchto výsledků nakonec vydedukujte, že $\Gamma(n)=(n-1)!$ a $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{2n-1}{2}\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.

2 Vyčíslete: **1.** $\displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathbf{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int_0^\infty\mathbf{e}^{-x^\lambda}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathbf{e}^{-ax^\lambda}\,\mathrm{d}x$;

4. $\displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathbf{e}^{-ax^\lambda}\cos bx^\lambda\,\mathrm{d}x$; **5.** $\displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathbf{e}^{-ax^\lambda}\sin bx^\lambda\,\mathrm{d}x$; **6.** $\displaystyle\int_0^1(-\ln x)^\lambda\,\mathrm{d}x$.
