$\boxed{1}$ Spočtěte integrál $\int_0^1 x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x$ (zde α je kladná konstanta). Derivujte ho n-krát podle α a tím zjistěte, čemu se rovná $\int_0^1 x^{\alpha-1}\ln^n x\,\mathrm{d}x$.

$\boxed{2}$ Vyčíslete integrál $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a}$ (a je kladná konstanta). Pak ho $n-1$-krát derivujte podle a a tím zjistěte, čemu se rovná $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a)^n}$.

$\boxed{3}$ Prozradím , že pro $\alpha > 0$, $b > 0$ platí $\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2b}\mathrm{e}^{-\alpha b}$. Pomocí toho zjistěte:

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin\alpha x\,\mathrm{d}x}{x^2+b^2}$; **2.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x\,\mathrm{d}x}{(x^2+b^2)^2}$; **3.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2\alpha x\,\mathrm{d}x}{x^2+b^2}$; **4.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$.

Poslední dva body zkuste jen, pokud zbude čas (a pozor, derivování u nich nepomůže).

$\boxed{4}$ V těchto integrálech derivujte podle parametru, sestavte pro integrál diferenciální rovnici a tu řešte.

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+a^2)}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\left(a\sin^2 x + b\cos^2 x\right)\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2-b/x^2}\,\mathrm{d}x$.

$\boxed{1}$ Vyčíslete $\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$ tak, že zapíšete $\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}$ jako integrál $\int_a^b \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y$ a ve dvojném integrálu zaměníte pořadí integrace. Pak podobnou metodou vyčíslete $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} ax - \operatorname{arc\,tg} bx}{x}\,\mathrm{d}x$.

$\boxed{2}$ Přesvědčte se, že platí $\int x^y\,\mathrm{d}y = \frac{x^y}{\ln x}$. Díky tomu vyčíslete:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int_0^1 \cos(-\ln x)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int_0^1 \sin(-\ln x)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x$.

$\boxed{3}$ Vyčíslete Dirichletův integrál $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x$ tak, že v něm položíte $\frac{1}{x} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y$.

$\boxed{4}$ Vhodným použitím integrace za znamením integrálu vyčíslete:

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arc\,tg}(a\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,\mathrm{d}x$.
