1 U následujících ploch nalezněte normálový vektor a napište rovnici tečné roviny (obojí pro obecný bod $[x_0; y_0; z_0]$ na této ploše):

1. $z = x^2 + y^2$; **2.** $x^2 + y^2 + z^2 = 100$; **3.** $\mathrm{e}^{x/z} + \mathrm{e}^{y/z} = 4$; **4.** $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$.

2 Dokažte, že tečné roviny k ploše zadané rovnicí

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} \qquad (a > 0)$$

vytnou na souřadnicových osách úseky, jejichž součet je konstantní. (Tím se myslí, že když najdeme průsečíky tečné roviny s x-ovou, y-ovou i z-ovou osou a sečteme jejich vzdálenosti od počátku souřadnic, dostaneme konstantu nezávisle na tom, v kterém bodě je tečná rovina přiložena.)

3 Dokažte, že roviny $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a jakákoli tečná rovina k ploše zadané rovnicí $xyz = a^3$ (a je kladná konstanta) vždy omezují čtyřstěn konstantního objemu, a to nezávisle na tom, ve kterém bodě jsme tečnou rovinu přiložili.

4 Hora má tvar grafu funkce $z = \frac{1}{1+4x^2+y^2}$. Určete v každém jejím bodě směr nejstrmějšího stoupání, nejprudšího klesání, a směry, ve kterých není ani stoupání, ani klesání. Jaký je vztah těchto čtyř směrů?

5 Nalezněte derivaci následujících funkcí $y(x)$ zadaných implicitně rovnicemi:

1. $y - a \sin y = x$ $(0 < a < 1)$; **2.** $y = 2x \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$.

6 Ukažte, že pokud platí $1 + xy = k(x - y)$, kde k je nějaká konstanta, pak musí být

$$\frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2}.$$

7 Máme funkci $y(x)$ zadanou implicitně rovnicí $F(x, y) = x^4 - x^2 + y^4 - y^2 = 0$. Pomocí věty o implicitní funkci najděte body větvení, tj. „problémové" body, v nichž je jednoznačnost funkce porušena. Zkuste si tyto problémové body nakreslit do obrázku a na základě toho určete, kde je funkce y dvojznačná, kde trojznačná a kde čtyřznačná.

Řešení

1 **Ad 1.** Normálový vektor $(2x_0, 2y_0, -1)$, tečná rovina $2xx_0 + 2yy_0 - z = x_0^2 + y_0^2 - z_0 = 0$. **Ad 2.** Normálový vektor (x_0, y_0, z_0), tečná rovina $xx_0 + yy_0 + zz_0 = 100$. **Ad 3.** Normálový vektor $\left(\frac{\mathrm{e}^{x_0/z_0}}{z_0}, \frac{\mathrm{e}^{y_0/z_0}}{z_0}, -\frac{x_0\mathrm{e}^{x_0/z_0} + y_0\mathrm{e}^{y_0/z_0}}{z_0^2}\right)$, tečná rovina $\mathrm{e}^{x_0/z_0}x + \mathrm{e}^{y_0/z_0}y - (x_0\mathrm{e}^{x_0/z_0} + y_0\mathrm{e}^{y_0/z_0})\frac{z}{z_0} = 0$. **Ad 4.** Normálový vektor $\left(-\frac{y_0}{x_0^2+y_0^2}, \frac{x_0}{x_0^2+y_0^2}, -1\right)$, tečná rovina $yx_0 - y_0x = (z - z_0)(x_0^2 + y_0^2)$.

2 Tečná rovina má rovnici

$$\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{a}.$$

x-ová osa je dána rovnostmi $y = z = 0$, takže hned vidíme, že na této ose se vytne úsek $\sqrt{ax_0}$. Podobně to skončí i u ostatních dvou os, takže součet je $\sqrt{ax_0} + \sqrt{ay_0} + \sqrt{az_0}$, což je a, tedy skutečně konstanta.

3 Rovnice tečné roviny je $xy_0z_0 + x_0yz_0 + x_0y_0z = 3x_0y_0z_0$. Na zjištění objemu čtyřstěnu musíme zjistit jednak plochu podstavy (a na to potřebujeme úseky, které tato rovina vytne na osách x, y), jednak výšku (úsek na ose z). Celkem dostáváme objem $\frac{9}{2}a^3 = \text{const}$.

4 Směr nejstrmějšího stoupání je dán gradientem; ten je rovnoběžný s vektorem $(4x, y, (1+4x^2+y^2)^2)$ Směr největšího klesání je přesně opačný, směry, v nichž se neklesá ani nestoupá, jsou ty dva, které jsou v tečné rovině k ploše a jsou ke gradientu kolmé.

5 **Ad 1.** $y' = \frac{1}{1-a\cos y}$. **Ad 2.** $y' = 2\frac{xy-(x^2+y^2)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}{x^2-y^2}$.

6 Vyjádříme $k = \frac{1+xy}{x-y}$, derivujeme obě strany rovnice. Pokud bychom si chtěli hodně ušetřit práci, můžeme to předtím přepsat na $\frac{1}{k} = \frac{x-y}{1+xy}$ a vzít z toho arkustangentu, čímž bychom dostali $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{k} = \operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy} = \operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y$, z čehož je výsledek už zjevný.

7 Body větvení mohou být jedině tam, kde je $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Vyjde najevo, že to jsou $[0; 0]$, $[\pm 1; 0]$ a $\left[{\color{red}\pm}\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}; {\color{blue}\pm}\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, kde obě barevná $\pm$ jsou na sobě nezávislá. Celkem tedy 7 bodů. Ovšem bod $[0; 0]$ je divný tím, že je isolovaný, což je vidět hned, když to přepíšeme do polárních souřadnic — vyjde $r^4(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi) = r^2$, tj. při $r \neq 0$ už je $r \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$. Proto ho vynecháme (funkce se v něm nevětví). Proto je vidět, že při $x = 0$ je funkce trojznačná, při $0 < |x| < 1$ dvojznačná, při $|x| = 1$ zas trojznačná a při $1 < |x| <= \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ čtyřznačná.