1 Napište výraz pro diferenciál funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ obecně n proměnných. Pak tento diferenciál zapište pomocí vektoru $\mathbf{grad}\, f$ a vektoru posunutí $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \dots, \mathrm{d}x_n)$. (Výsledný výraz bude úplně nezávislý na tom, kolik proměnných funkce má!)

2 Mějme funkci $f(x, y)$.

1. Popojdeme-li podél osy x o vzdálenost r, oč se změní funkce f v prvním přiblížení? Zjistěte to pomocí diferenciálu $\mathrm{d}f$. Jaký je význam $\frac{\partial f}{\partial x}$?

2. Udělejte totéž pro případ, kdy popojdeme o vzdálenost r podél osy y. Zjistěte, oč se funkce f změní, a jaký je význam $\frac{\partial f}{\partial y}$.

3. Totéž ovšem můžeme dělat i v jiných směrech. Udělejte to pro případ, kdy popojdeme o vzdálenost r podél přímky, která svírá s kladnou poloosou x úhel 45°. Jaká veličina teď vystupuje na místě, kde v předchozích případech bylo $\frac{\partial f}{\partial x}$ atd.? To je *směrová derivace* f v řečeném směru.

4. Jak to dopadne obecně? Napište vztah pro směrovou derivaci funkce f ve směru vektoru $\boldsymbol{a}$. Použijte v tomto vztahu $\mathbf{grad}\, f$.

3 Vyšetřujeme funkci $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kolem nějakého zadaného bodu. Kterým směrem v okolí tohoto bodu funkce nejvíc roste? Kterým nejvíc klesá a ve kterých směrech se nemění?

---

1 Napište výraz pro diferenciál funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ obecně n proměnných. Pak tento diferenciál zapište pomocí vektoru $\mathbf{grad}\, f$ a vektoru posunutí $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \dots, \mathrm{d}x_n)$. (Výsledný výraz bude úplně nezávislý na tom, kolik proměnných funkce má!)

2 Mějme funkci $f(x, y)$.

1. Popojdeme-li podél osy x o vzdálenost r, oč se změní funkce f v prvním přiblížení? Zjistěte to pomocí diferenciálu $\mathrm{d}f$. Jaký je význam $\frac{\partial f}{\partial x}$?

2. Udělejte totéž pro případ, kdy popojdeme o vzdálenost r podél osy y. Zjistěte, oč se funkce f změní, a jaký je význam $\frac{\partial f}{\partial y}$.

3. Totéž ovšem můžeme dělat i v jiných směrech. Udělejte to pro případ, kdy popojdeme o vzdálenost r podél přímky, která svírá s kladnou poloosou x úhel 45°. Jaká veličina teď vystupuje na místě, kde v předchozích případech bylo $\frac{\partial f}{\partial x}$ atd.? To je *směrová derivace* f v řečeném směru.

4. Jak to dopadne obecně? Napište vztah pro směrovou derivaci funkce f ve směru vektoru $\boldsymbol{a}$. Použijte v tomto vztahu $\mathbf{grad}\, f$.

3 Vyšetřujeme funkci $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kolem nějakého zadaného bodu. Kterým směrem v okolí tohoto bodu funkce nejvíc roste? Kterým nejvíc klesá a ve kterých směrech se nemění?

1 Napište výraz pro diferenciál funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ obecně n proměnných. Pak tento diferenciál zapište pomocí vektoru $\mathbf{grad}\, f$ a vektoru posunutí $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n)$. (Výsledný výraz bude úplně nezávislý na tom, kolik proměnných funkce má!)

2 Mějme funkci $f(x, y)$.

1. Popojdeme-li podél osy x o vzdálenost r, oč se změní funkce f v prvním přiblížení? Zjistěte to pomocí diferenciálu $\mathrm{d}f$. Jaký je význam $\frac{\partial f}{\partial x}$?
2. Udělejte totéž pro případ, kdy popojdeme o vzdálenost r podél osy y. Zjistěte, oč se funkce f změní, a jaký je význam $\frac{\partial f}{\partial y}$.
3. Totéž ovšem můžeme dělat i v jiných směrech. Udělejte to pro případ, kdy popojdeme o vzdálenost r podél přímky, která svírá s kladnou poloosou x úhel 45°. Jaká veličina teď vystupuje na místě, kde v předchozích případech bylo $\frac{\partial f}{\partial x}$ atd.? To je *směrová derivace* f v řečeném směru.
4. Jak to dopadne obecně? Napište vztah pro směrovou derivaci funkce f ve směru vektoru $\boldsymbol{a}$. Použijte v tomto vztahu $\mathbf{grad}\, f$.

3 Vyšetřujeme funkci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kolem nějakého zadaného bodu. Kterým směrem v okolí tohoto bodu funkce nejvíc roste? Kterým nejvíc klesá a ve kterých směrech se nemění?

Představte si křivku zadanou rovnicí $f(x, y) = 0$. Tedy tu křivku tvoří takové body $[x; y]$, které této rovnici vyhoví. Kdyby např. f bylo $x^2 + y^2 - 1$, šlo by o jednotkovou kružnici.

1 Napište výraz pro diferenciál funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ obecně n proměnných. Pak tento diferenciál zapište pomocí vektoru $\mathbf{grad}\, f$ a vektoru posunutí $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n)$. (Výsledný výraz bude úplně nezávislý na tom, kolik proměnných funkce má!)

2 Mějme bod na křivce $f(x, y) = 0$. Uděláme krůček $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ do velmi blízkého bodu. Napište diferenciál $\mathrm{d}f$ a zjistěte z něj, co musí platit pro tento krůček $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, aby skončil v jiném bodu na téže křivce (tedy v bodě, kde platí rovněž $f = 0$). Popište jednoduše slovně, jaký musí být vztah $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ k vektoru $\mathbf{grad}\, f$.

3 Uvědomte si tečna ke křivce má přesně stejný směr jako ten malý krůček $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, který vede do blízkého bodu na téže křivce. Napište vektorovou rovnici, kterou musí splnit bod $\boldsymbol{X}$, aby ležel na tečně vedené bodem $\boldsymbol{X}_0$.

4 Mění se na Vašich závěrech z předchozích úloh něco, pokud budeme pracovat s funkcí víc než dvou proměnných?

5 Jak můžete snadno metodu, kterou jste vybudovali, použít k hledání tečné roviny ke grafu funkce $z = f(x, y)$?

Představte si křivku zadanou rovnicí $f(x, y) = 0$. Tedy tu křivku tvoří takové body $[x; y]$, které této rovnici vyhoví. Kdyby např. f bylo $x^2 + y^2 - 1$, šlo by o jednotkovou kružnici.

1 Napište výraz pro diferenciál funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ obecně n proměnných. Pak tento diferenciál zapište pomocí vektoru $\mathbf{grad}\, f$ a vektoru posunutí $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \dots, \mathrm{d}x_n)$. (Výsledný výraz bude úplně nezávislý na tom, kolik proměnných funkce má!)

2 Mějme bod na křivce $f(x, y) = 0$. Uděláme krůček $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ do velmi blízkého bodu. Napište diferenciál $\mathrm{d}f$ a zjistěte z něj, co musí platit pro tento krůček $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, aby skončil v jiném bodu na téže křivce (tedy v bodě, kde platí rovněž $f = 0$). Popište jednoduše slovně, jaký musí být vztah $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ k vektoru $\mathbf{grad}\, f$.

3 Uvědomte si tečna ke křivce má přesně stejný směr jako ten malý krůček $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, který vede do blízkého bodu na téže křivce. Napište vektorovou rovnici, kterou musí splnit bod $\boldsymbol{X}$, aby ležel na tečně vedené bodem $\boldsymbol{X}_0$.

4 Mění se na Vašich závěrech z předchozích úloh něco, pokud budeme pracovat s funkcí víc než dvou proměnných?

5 Jak můžete snadno metodu, kterou jste vybudovali, použít k hledání tečné roviny ke grafu funkce $z = f(x, y)$?

Představte si křivku zadanou rovnicí $f(x, y) = 0$. Tedy tu křivku tvoří takové body $[x; y]$, které této rovnici vyhoví. Kdyby např. f bylo $x^2 + y^2 - 1$, šlo by o jednotkovou kružnici.

1 Napište výraz pro diferenciál funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ obecně n proměnných. Pak tento diferenciál zapište pomocí vektoru $\mathbf{grad}\, f$ a vektoru posunutí $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \dots, \mathrm{d}x_n)$. (Výsledný výraz bude úplně nezávislý na tom, kolik proměnných funkce má!)

2 Mějme bod na křivce $f(x, y) = 0$. Uděláme krůček $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ do velmi blízkého bodu. Napište diferenciál $\mathrm{d}f$ a zjistěte z něj, co musí platit pro tento krůček $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, aby skončil v jiném bodu na téže křivce (tedy v bodě, kde platí rovněž $f = 0$). Popište jednoduše slovně, jaký musí být vztah $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ k vektoru $\mathbf{grad}\, f$.

3 Uvědomte si tečna ke křivce má přesně stejný směr jako ten malý krůček $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, který vede do blízkého bodu na téže křivce. Napište vektorovou rovnici, kterou musí splnit bod $\boldsymbol{X}$, aby ležel na tečně vedené bodem $\boldsymbol{X}_0$.

4 Mění se na Vašich závěrech z předchozích úloh něco, pokud budeme pracovat s funkcí víc než dvou proměnných?

5 Jak můžete snadno metodu, kterou jste vybudovali, použít k hledání tečné roviny ke grafu funkce $z = f(x, y)$?

Představte si, že máme rovnici $F(x, y) = 0$ (například $x^2 + y^2 - 1 = 0$). Taková rovnice zadává y jako funkci x (a také x jako funkci y). Tomu říkáme, že je ta funkce zadána *implicitně*.

1 Připomeňte si řetězové pravidlo. Mám-li funkci $f(a, b)$, čemu se budou rovnat derivace $f(a(x, y), b(x, y))$ podle x a y?

2 Mějme rovnici $F(x, y) = 0$ a uvažujme funkci $y(x)$, která je tím zadána. Jak najdete její derivaci $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$? Zjistěte to tak, že zderivujete parciálně rovnost $F(x, y) = 0$ podle x. **Pozor!** Nepleťte si zde derivace podle x a derivace podle *prvního argumentu* funkce F (v minulém příkladě bychom ho označili a)!

3 Podívejte se na rovnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Nakreslete si množinu všech bodů v rovině, které ji splňují. Rozdělte křivku na kusy tak, aby každý kus tvořil jednoznačnou funkci (tedy pro každé x nejvýše jedna hodnota y). Které body tyto kusy oddělují?

4 Obecně platí *věta o implicitní funkci*: pokud máme rovnici $F(x, y) = 0$ a nějaký zadaný bod, který ji splňuje, je možné za nějakých podmínek vyjádřit v nějakém okolí tohoto bodu y jako funkci x. Jedna z těch podmínek je spojitost obou parciáních derivací. Najdete tu druhou? Uvažujte, kdy může nastat nejednoznačnost (je to jen v případě, že se graf funkce v nějakém bodě „zatočí“ zpátky). **Nápověda:** Uvažujte o tečně k té křivce. Až to budete mít, vyjádřete to kritérium pomocí parciálních derivací.

Představte si, že máme rovnici $F(x, y) = 0$ (například $x^2 + y^2 - 1 = 0$). Taková rovnice zadává y jako funkci x (a také x jako funkci y). Tomu říkáme, že je ta funkce zadána *implicitně*.

1 Připomeňte si řetězové pravidlo. Mám-li funkci $f(a, b)$, čemu se budou rovnat derivace $f(a(x, y), b(x, y))$ podle x a y?

2 Mějme rovnici $F(x, y) = 0$ a uvažujme funkci $y(x)$, která je tím zadána. Jak najdete její derivaci $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$? Zjistěte to tak, že zderivujete parciálně rovnost $F(x, y) = 0$ podle x. **Pozor!** Nepleťte si zde derivace podle x a derivace podle *prvního argumentu* funkce F (v minulém příkladě bychom ho označili a)!

3 Podívejte se na rovnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Nakreslete si množinu všech bodů v rovině, které ji splňují. Rozdělte křivku na kusy tak, aby každý kus tvořil jednoznačnou funkci (tedy pro každé x nejvýše jedna hodnota y). Které body tyto kusy oddělují?

4 Obecně platí *věta o implicitní funkci*: pokud máme rovnici $F(x, y) = 0$ a nějaký zadaný bod, který ji splňuje, je možné za nějakých podmínek vyjádřit v nějakém okolí tohoto bodu y jako funkci x. Jedna z těch podmínek je spojitost obou parciáních derivací. Najdete tu druhou? Uvažujte, kdy může nastat nejednoznačnost (je to jen v případě, že se graf funkce v nějakém bodě „zatočí“ zpátky). **Nápověda:** Uvažujte o tečně k té křivce. Až to budete mít, vyjádřete to kritérium pomocí parciálních derivací.

Představte si, že máme rovnici $F(x, y) = 0$ (například $x^2 + y^2 - 1 = 0$). Taková rovnice zadává y jako funkci x (a také x jako funkci y). Tomu říkáme, že je ta funkce zadána *implicitně*.

$\boxed{1}$ Připomeňte si řetězové pravidlo. Mám-li funkci $f(a, b)$, čemu se budou rovnat derivace $f(a(x, y), b(x, y))$ podle x a y?

$\boxed{2}$ Mějme rovnici $F(x, y) = 0$ a uvažujme funkci $y(x)$, která je tím zadána. Jak najdete její derivaci $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$? Zjistěte to tak, že zderivujete parciálně rovnost $F(x, y) = 0$ podle x. **Pozor!** Nepleťte si zde derivace podle x a derivace podle *prvního argumentu* funkce F (v minulém příkladě bychom ho označili a)!

$\boxed{3}$ Podívejte se na rovnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Nakreslete si množinu všech bodů v rovině, které ji splňují. Rozdělte křivku na kusy tak, aby každý kus tvořil jednoznačnou funkci (tedy pro každé x nejvýše jedna hodnota y). Které body tyto kusy oddělují?

$\boxed{4}$ Obecně platí *věta o implicitní funkci*: pokud máme rovnici $F(x, y) = 0$ a nějaký zadaný bod, který ji splňuje, je možné za nějakých podmínek vyjádřit v nějakém okolí tohoto bodu y jako funkci x. Jedna z těch podmínek je spojitost obou parciáních derivací. Najdete tu druhou? Uvažujte, kdy může nastat nejednoznačnost (je to jen v případě, že se graf funkce v nějakém bodě „zatočí“ zpátky). **Nápověda:** Uvažujte o tečně k té křivce. Až to budete mít, vyjádřete to kritérium pomocí parciálních derivací.