1 V této úloze se podíváme na zoubek hledání kmenových funkcí. Začneme velmi jednoduše:

1. Jak byste řešili diferenciální rovnici $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + a\sin x + a^2$, kde a je konstanta?

2. Máme funkci $f(x, y)$. Vyřešte velmi podobnou rovnici $\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y\sin x + y^2$. Připomínám, že při parciálním derivování se všechny proměnné, podle kterých se nederivuje (zde jmenovitě y), považují za konstanty!

3. V předchozím bodě jste při řešení rovnice jednou integrovali, takže v řešení musí být jedna integrační konstanta. Vysvětlete, jak přesně takto konstanta má vypadat (ještě jednou připomenu, že y se považovalo za konstantu!!)

4. Řekněme, že bych k rovnici z druhého bodu přidal ještě jednu: $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - \cos x + y^2$. Jaká volnost pak zůstává v určení f?

2 V předchozí úloze jsme vlastně vyřešili tento problém: jak zjistím funkci, když znám její gradient? (Nebo: jak zjistím funkci, když znám její diferenciál?) Vyzkoušejte si to ještě párkrát:

1. Víte, že $\mathbf{grad}\, F = (2x\sin y + y^2\cos x,\quad x^2\cos y + 2y\sin x)$. Najděte F.

2. Je $\mathrm{d}F = \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$. Najděte F.

3 Nabízí se otázka: jde ke každému vektoru (přesněji řečeno vektorovému poli) najít taková funkce, že by dotyčný vektor byl jejím gradientem? Nebo to někdy nejde? Zkuste tuto otázku zodpovědět. Přitom se bude hodit, když se zamyslíte nad tím, co musí splňovat smíšené druhé derivace.

4 Už umíme napsat diferenciál skalární funkce. Teď zkusíme něco podobného pro vektorové funkce.

1. Máme vektorovou funkci $\boldsymbol{F}$ (tj. vložíme do ní vektor $\boldsymbol{x}$ a dostaneme jiný vektor $\boldsymbol{y}$ — ne nutně stejné dimense!) Uvědomte si, že takovou funkci lze napsat jako vektor, který má ve složkách obyčejné funkce:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\boldsymbol{x}) \\ F_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ F_n(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.$$

2. Pro každou z těchto složek napište diferenciál. Všechny tyto diferenciály si napište pěkně pod sebe. Když to uděláte hezky, měli byste z toho hned vidět, že všechny dohromady půjdou zapsat maticově:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{J}\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

kde $\mathcal{J}$ je jakási matice. Napište, jak tato matice má vypadat. Takové matici se říká *Jacobiho* matice pro dané zobrazení $\boldsymbol{F}$.

5 Hodně často se vyšetřují zobrazení mezi prostory stejné dimense. V takovém případě bude Jacobiho matice čtvercová a půjde spočítat její determinant. Tomuto determinantu se říká *jakobián.*

1. Jaký je geometrický význam jakobiánu? (Determinant udává objem nějakého rovnoběžnostěnu (obecně v n dimensích). Vybavte si, jak to s tím je přesně.)

2. Mějme dvě zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, a to $\boldsymbol{F}_1$ s Jacobiho maticí $\mathcal{J}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ s Jacobiho maticí $\mathcal{J}_2$. Jaká bude Jacobiho matice složeného zobrazení $\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x}))$? Jaký bude jakobián?

3. Typickým případem takového zobrazení je přechod k jiným souřadnicím. Představme si třeba, že jdeme z polárních souřadnic ke kartézským podle vzorců

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Najděte Jacobiho matici tohoto zobrazení a spočtěte jakobián.