Řešení první písemky

První úloha

1 Vybavte reálnou osu $\mathbb{R}$ takovou metrikou, aby posloupnost 1, $1+2$, $1+2+3$, $1+2+3+4$ atd. (obecný člen je $x_n = \frac{n(n+1)}{2}$) konvergovala k bodu $-\frac{1}{12}$. [2 **body**]

Tady je velmi mnoho možností. Můžeme se například inspirovat „překroucenou číselnou osou“ z prvního cvičení. Vytrhneme $-\frac{1}{12}$ a dáme ji „do nekonečna“. Zavedeme tedy funkci $f(x)$ takto:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } x = -\frac{1}{12}, \\ \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x+\frac{1}{12}} & \text{jinak,} \end{cases}$$

a metriku pak zavedeme takto:

$$\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|.$$

Můžeme také ověřit, že tato metrika zadání úlohy skutečně splňuje (i když to se po nás nechtělo). Vzdálenost mezi n-tým členem $x_n = \frac{n(n+1)}{2}$ a bodem $-\frac{1}{12}$ je pak rovna

$$\rho\left(\frac{n(n+1)}{2}, -\frac{1}{12}\right) = \left|f\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - f\left(-\frac{1}{12}\right)\right| = \left|\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{12}} - 0\right| = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{12}}.$$

Proto máme

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, -\tfrac{1}{12}) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{12}} = \operatorname{arc\,tg} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{12}} = \operatorname{arc\,tg} 0 = 0,$$

a vidíme, že posloupnost x_n skutečně konverguje k $-\frac{1}{12}$, jak se to požadovalo.

Druhá úloha

2 Mějme množinu $M = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}\}$. Na množině M^6 všech šestic těchto písmen zavedeme „metriku Logik“ takto: $\rho(a,b) = 6 - p - \frac{r}{6}$, kde p je počet míst, v nichž se písmena v obou slovech shodují, a r je počet míst ve slově a, která obsahují písmeno, jež je ve slově b obsaženo, ale ne na stejném místě (p a r jsou tedy počty „úplných“ a „částečných“ shod ve hře Logik alias Mastermind.)

Dokažte, že (M^6, ρ) **není** metrickým prostorem. (**Nápověda:** Zkuste se podívat na axiom symetrie.) [2 **body**]

Stačí se podívat třeba na slova $P = \mathrm{ABBBBC}$ a $Q = \mathrm{ABBBBA}$. Posuzujme $\rho(P,Q)$ a $\rho(Q,P)$. Prvních pět písmen se shoduje, takže ve vzorci $\rho = 6-p-\frac{r}{6}$ musíme v obou případech klást $p = 5$. U posledního písmena je to ale jiné: při počítání $\rho(P,Q)$ je v posledním písmenu úplná neshoda, protože „C“ v druhém slově vůbec není, a máme $r = 0$. Naopak při počítání $\rho(Q,P)$ vidíme, že písmeno „A“ na poslední posici sice nesedí, ale aspoň je obsaženo jinde v P: jde tedy o „částečnou“ shodu a máme $r = 1$. Proto je $\rho(P,Q) = 1 \neq \rho(Q,P) = \frac{5}{6}$.

Třetí úloha

$\boxed{3}$ Mějme jakýkoli metrický prostor (M, ρ). Dokažte, že jakákoli množina, která je v něm uzavřená i otevřená zároveň, nemá žádnou hranici. A obráceně, dokažte, že množina, která nemá žádnou hranici, je otevřená i uzavřená. [1 **bod**]

Pokud je množina (označme ji třeba A) otevřená, rovná se svému vnitřku, tedy $A = \text{vnitřek}\, A$. Je-li naopak uzavřená, rovná se sjednocení svého vnitřku a své hranice, tj. $A = \text{vnitřek}(A) \cup \partial A$. Otevřená i uzavřená zároveň je tudíž právě tehdy, když platí

$$A = \text{vnitřek}(A) = \text{vnitřek}(A) \cup \partial A.$$

Z toho už je vidět, že když je $\partial A = \emptyset$, je ta podmínka určitě splněna a množina je tedy otevřená i uzavřená.

Naopak, je-li množina otevřená i uzavřená, musí být $\text{vnitřek}(A) = \text{vnitřek}(A) \cup \partial A$. Z toho je vidět, že ∂A může obsahovat pouze body, které patří do vnitřku A. Jenže každý bod metrického prostoru patří **buď** do vnitřku, **nebo** do vnějšku, **nebo** do hranice množiny A, takže když bod patří do hranice, už do vnitřku patřit nemůže. Proto dostáváme, že musí být $\partial A = \emptyset$.

Čtvrtá úloha

$\boxed{4}$ Proveďte následující:

1. Napište předpis nějaké funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$, která by byla definována pouze ve čtverci $\langle -1; 1\rangle \times \langle -1; 1\rangle$ a nikde jinde. [½ **bodu**]

2. Zjistěte, jak vypadají vrstevnice funkce $f(x, y) = \dfrac{x^2 + (y-1)^2}{x^2 + (y+1)^2}$, a načrtněte obrázek. [½ **bodu**]

Ad 1. Můžeme si např. uvědomit, že $\sqrt{1 - x^2}$ je definována pouze při $-1 \le x \le 1$, a podobně $\sqrt{1 - y^2}$ je definována jen při $-1 \le y \le 1$. Proto jednou takovou funkcí je třeba

$$\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}.$$

Ad 2. Máme-li zjistit, jak vypadají vrstevnice, prostě vyšetříme rovnici $f = K$, kde K je nějaká konstanta, která vrstevnice „čísluje“. V tomto případě máme

$$\frac{x^2 + (y-1)^2}{x^2 + (y+1)^2} = K.$$

Teď chceme vědět, jaké křivky to v rovině udělá. Předně si všimneme, že výraz vlevo je vždy nezáporný, takže musí být $K \ge 0$. Dále rozšíříme rovnici jmenovatelem a rozepíšeme čtverce, čímž dostaneme

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = Kx^2 + Ky^2 + 2Ky + K,$$

a když to dáme všechno na jednu stranu, bude z toho

$$(K-1)x^2 + (K-1)y^2 + 2(K+1)y + (K-1) = 0.$$

Jestliže je $K = 1$, pak většina závorek vypadne a zůstane přímka $4y = 0$, tj. $y = 0$. To je x-ová osa. V opačném případě můžeme závorku $K - 1$ zkrátit a obdržet $x^2 + y^2 + 2\frac{K+1}{K-1}y + 1 = 0$. Doplníme v y na čtverec a konstanty zas pošleme doprava, čímž získáme

$$x^2 + \left(y + \frac{K+1}{K-1}\right)^2 = \left(\frac{K+1}{K-1}\right)^2 - 1 = \frac{(K+1)^2 - (K-1)^2}{(K-1)^2} = \frac{4K}{(K-1)^2}.$$

Takže ostatní vrstevnice jsou kružnice se středem v bodě $\left[0; -\frac{K+1}{K-1}\right]$ a poloměrem $\frac{2\sqrt{K}}{|K-1|}$ (K musí být nezáporné). Takovým kružnicím se říká *Apolloniovy kružnice*.

Pátá úloha

$\boxed{5}$ Mějme jakoukoli funkci $f(x, y)$. Je možné, aby se některé dvě její vrstevnice protínaly? Pokud ano, podejde příklad takové funkce a ukažte, které její vrstevnice se protínají a kde. Pokud to možné není, dokažte, že to nejde. [1 **bod**]

Rozhodně to nejde. Vrstevnice je množina všech bodů splňujících rovnici $f(X) = c$ pro zadanou konstantu c. Řekněme, že se v nějakém bodě X protínají dvě různé vrstevnice: pak musí platit $f(X) = c$ i $f(X) = d$, tedy $c = d$ a dostáváme spor s tím, že jsou ty vrstevnice různé.

Jinak řečeno, každá funkce má v každém bodě jenom jednu hodnotu — proto jeden bod prostě nemůže patřit do vrstevnice s např. $c = 1$ i s $c = 2$, protože pak by to znamenalo, že nabývá v tom jednom bodě zároveň hodnoty 1 i 2.

Šestá úloha

$\boxed{6}$ Vypočtěte následující limity, nebo dokažte, že neexistují: [½ **bodu za každou**]

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y}$; **2.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$.

Ad 1. Jelikož oba siny mohou nabývat pouze hodnot mezi -1 a 1, jistě platí nerovnost

$$-x - y \leq (x+y) \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y} \leq x + y.$$

Oba krajní výrazy jdou ovšem při $x \to 0$, $y \to 0$ do nuly. Proto podle věty o třech limitách je i ta limita, kterou jsme měli spočítat, rovna nule.

Ad 2. Budeme se blížit do nuly po různých přímkách $y = kx$. Dosadíme-li to tam, dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{k^2x^4}{k^2x^4 + (k-1)^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^2}{k^2x^2 + (k-1)^2}.$$

Teď už snadno vidíme, že např. při $k = 0$ je pod limitou výraz $\frac{0}{1} = 0$, který jde zjevně do nuly, zatímco při $k = 1$ je tam výraz $\frac{x^2}{x^2} = 1$, který jde do jedničky. Limita je tedy závislá na k a nemůže existovat.