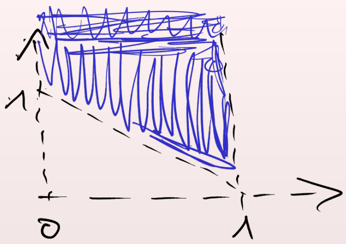
Řešení čtvrté písemky

První úloha

1 Vyčíslete integrál $\displaystyle\iint\limits_{\substack{x+y\geq 1\\ 0\leq x\leq 1}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+(x+y)^2}$. [1 **bod**]



Budeme např. integrovat nejdřív podle x (to půjde od 0 do 1, což ostatně vidíme přímo z popisu integrační oblasti) a pak podle y. Zespoda je integrační oblast omezena přímkou $x+y=1$, tj. $y=1-x$. Nakreslíme si to vše do obrázku (viz vpravo). Z něj je pak jasné, že y vždycky *začíná* na té přímce (tj. na hodnotě $1-x$) a odtamtud pokračuje nahoru až do nekonečna. Proto můžeme psát

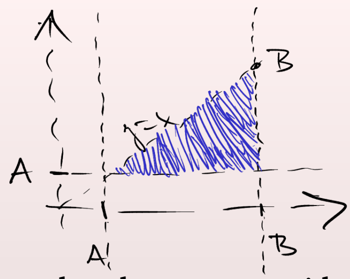
$$\iint\limits_{\substack{x+y\geq 1\\ 0\leq x\leq 1}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+(x+y)^2} = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{1+(x+y)^2}.$$

Ve vnitřním integrálu zavedeme substituci $u=x+y$. Z toho je $\mathrm{d}y=\mathrm{d}u$ (teď se integruje podle u, takže x se zatím považuje za konstantu!) a k mezím se přičte x, takže tento vnitřní integrál půjde od 1 do ∞. Oba integrály jsou najednou nezávislé, takže je snadno vyčíslíme:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Druhá úloha

2 Zaměňte pořadí integrace ve výrazu $\displaystyle\int_A^B \mathrm{d}x \int_A^x (x-y)^{\alpha} f(y)\,\mathrm{d}y$, přičemž $A<B$ a α jsou konstanty. Pak spočítejte vnitřní integrál (podle x), čímž tento výraz zjednodušíte tak, že místo dvou integrací v něm bude vystupovat jen jedna. [1 **bod**]



Při zaměňování pořadí integrace je vždycky nejlepší si nakreslit obrázek. Nakreslíme si tedy nějaký takový, jaký je vpravo: x se pohybuje mezi pevnými mezemi A a B, zatímco y jde vždy od pevné meze A až do x. Výsledkem tedy bude trojúhelník omezený přímkami $y=A$, $x=B$ a $y=x$, tak, jak je to na obrázku.

Díky obrázku už také snadno zaměníme pořadí integrace. V původním výrazu jsme nejdřív šli vodorovně a teprv potom svisle; proto teď musíme jít nejdřív svisle. Odkud kam to bude? Z obrázku je vidět, že zase od A do B. Potom jdeme vodorovně: začneme vždycky na šikmé straně (tedy při $x=y$) a jdeme až ke svislé ($x=B$). Proto můžeme napsat záměnu. Přitom $f(y)$ je jen funkcí y, a tak ji můžeme vystrnadit do vnějšího integrálu podle y — při integraci podle x se jedná jen o konstantu:

$$\int_A^B \mathrm{d}x \int_A^x (x-y)^{\alpha} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_A^B f(y)\,\mathrm{d}y \int_y^B (x-y)^{\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

Ve vnitřním integrálu teď položíme $u=x-y$. Jelikož se integruje podle x, je y z našeho pohledu zatím jen konstanta, takže je $dx = du$ a meze se posunou dolů o y, takže najednou jdou od 0 do $B - y$. Zůstane

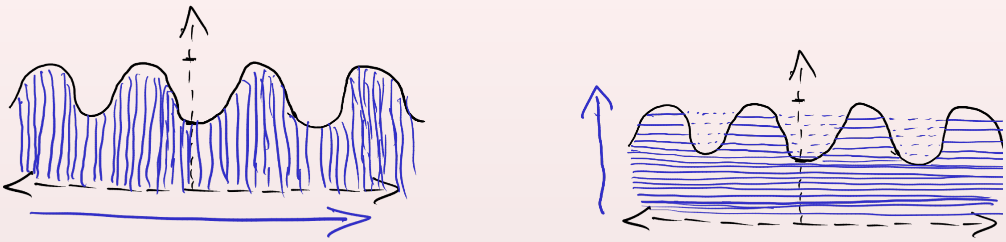
$$\int_A^B f(y)\,dy \int_0^{B-y} u^\alpha\,du = \int_A^B f(y)\frac{(B-y)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,dy,$$

což už je žádaný výsledek.

Třetí úloha

$\boxed{3}$ Víme, že někdy je jedno pořadí integrace lepší než druhé. Podejte ultimátní příklad tohoto jevu: najděte nějakou oblast Ω takovou, že v kartézských souřadnicích půjde $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ zapsat v jednom pořadí *jedním* dvojnásobným integrálem, zatímco v druhém jej bude nutné napsat jako součet *nekonečně mnoha* dvojnásobných integrálů. [**2 body, pokud Vaše Ω bude omezená, jinak 1 bod**]

Víme, že rozpad integrálu na několik sčítanců nastane, když je v integrační oblasti nějaký „roh“. Možností jsou opravdu mraky, ale jedna taková by mohla být třeba takováto:



To by znamenalo, že naše oblast bude zespoda omezena přímkou $y = 0$ a zeshora $y = 1 + \sin^2 x$. Zatímco pokud integrujeme nejdřív podle x a pak podle y, dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{1+\sin^2 x} dy\, f(x,y),$$

tedy jediný sčítanec, při postupu opačném se se sčítanci roztrhne pytel. Jednak musíme dát bokem pás $0 \le y \le 1$, a při $1 \le y \le 2$ musíme integrovat přes ty „vlnky“, ovšem přes každou zvlášť. Když je $y = 1 + \sin^2 x$, tak máme $x = \arcsin\sqrt{y-1}$. Proto kopeček kolem $n\pi + \frac{\pi}{2}$ musíme integrovat takto:

$$\int_1^2 dy \int_{n\pi + \arcsin\sqrt{y-1}}^{(n+1)\pi - \arcsin\sqrt{y-1}} dx\, f(x,y).$$

A to je potřeba posčítat přes všechny ty kopečky, takže celkem máme opravdu nekonečný počet sčítanců:

$$\int_0^1 dy \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x,y) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_1^2 dy \int_{n\pi + \arcsin\sqrt{y-1}}^{(n+1)\pi - \arcsin\sqrt{y-1}} dx\, f(x,y).$$

Tohle má jen jeden problém: takto určená oblast Ω není omezená. Jak udělat něco podobného pro omezenou množinu? Snadno: musíme prostě nahustit nekonečný počet „kopečků“ na konečný interval, ale to není tak těžké. Řekněme třeba, že kopečky budou mít údolí v bodech 1, $\mathbf{e}^{-1}$,

e^{-2} atd., vždy k-té bude v bodě e^{-k}. Pak můžeme klidně poslat $k \to \infty$ a polohy údolí půjdou jen do nuly, takže se všechny směstnají do intervalu $\langle 0; 1 \rangle$. Proto tu naši oblast uděláme tak, že ji omezíme zase zdola přímkou $y = 0$, ze stran přímkami $x = 0$ a $x = 1$ a zeshora funkcí „$1 + \sin^2 k\pi$“. Samozřejmě k jsou celá čísla, ale když vidíme, že údolí jsou v bodech $x = \mathrm{e}^{-k}$, stačí dát místo k například $\ln x$. Pokud zeshora bude křivka $y = 1 + \sin^2(\pi \ln x)$, bude všechno fungovat pěkně tak, jak má.

Čtvrtá úloha

$\boxed{4}$ Jedním z nejdůležitějších určitých integrálů je $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Spočtěte ho takto: jistě lze napsat i $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$, protože je úplně jedno, jak se jmenuje integrační proměnná. Násobením těchto dvou výrazů dostanete I^2 jako dvojnásobný integrál. Přejděte do polárních souřadnic a vyčíslete ho. Odmocněním zjistíte, kolik je I. [1 **bod**]

2. S pomocí Vašeho výsledku z předchozího bodu vyčíslete obecnější integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)}\,\mathrm{d}x$, kde $a > 0$, b, c jsou konstanty. [1 **bod**]

Zachováme se přesně podle zadání. Napíšeme

$$I^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Zadání nám radí, že máme přejít do polárních souřadnic (i když x^2+y^2 nás tu udeří do očí tak, že bychom na to asi přišli i bez této rady). Pak místo $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ dostaneme e^{-r^2}, což vypadá, že není žádná pomoc, ale všechno zásadně změní jakobián: místo $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ máme $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$, takže

$$I^2 = \int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{0}^{\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r = \left\| \begin{array}{rcl} u & = & r^2 \\ \frac{\mathrm{d}u}{2} & = & r\,\mathrm{d}r \end{array} \right\| = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \pi,$$

takže to můžeme už odmocnit a dostáváme megadůležitý výsledek

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Tím je splněn první bod. A co druhý? To už je jenom obyčejné doplnění na čtverec. Jelikož máme $a > 0$, můžeme určitě napsat $ax^2 + bx + c$ jako $(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$. Tím dostáváme (funkce „$\exp(\cdots)$“ prostě znamená „e na $(\cdots)$“, jen se to mnohem víc hodí pro případy, kdy argument exponenciály zabírá hodně místa):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(ax^2+bx+c)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left[\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}\right]\right\}\mathrm{d}x.$$

Z toho $e^{(b^2-4ac)/4a}$ můžeme vyhodit před integrál jako konstantu a ve zbytku můžeme položit $u = \sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}$, z čehož hned vidíme, že $dx = du/\sqrt{a}$. Meze se tím vůbec nezmění a zůstává

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx = e^{(b^2-4ac)/4a}\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Pátá úloha

$\boxed{5}$ Vyčíslete následující n-násobné integrály: [1 **bod za každý**]

1. $\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$; **2.** $\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 (x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$.

Tyhle integrály možná vypadají výhrůžně, ale ve skutečnosti jsou dost snadné. Ten první je jednodušší než ten druhý, tak začněme jím.

Pod integrály stojí součet $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Nejlepší bude integrovat každý sčítanec zvlášť. Začněme s x_1:

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 x_1^2\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n.$$

Integrujeme postupně podle všech proměnných. Při integraci podle x_1 musíme spočítat

$$\int_0^1 x_1^2\,dx_1 = \left[\frac{x_1^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Integrace podle všech ostatních proměnných dají jenom jedničku, a tak při n-násbné integraci x_1^2 dostaneme prostě 1/3. Je asi jasné, že u ostatních sčítanců se stane úplně přesně totéž a každý z nich vyhodí rovněž 1/3. Máme tedy součet n integrálů, každý je roven jedné třetině, a výsledek tedy musí být

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n = \frac{n}{3}.$$

No a co ten druhý? Zase uplatníme stejnou logiku, jen musíme rozepsat ten čtverec:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 = x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+2x_1x_2+2x_1x_3+\cdots+2x_1x_n+2x_2x_3+\cdots+2x_{n-1}x_n.$$

Součet $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ jsme už zintegrovali v předchozím bodě a víme, že to vyhodí $n/3$. Co ten zbytek? Všechny členy typu $2x_{\text{něco}}x_{\text{něco jiného}}$ se zase zřejmě zintegrují na totéž. Nač, to zjistíme, když zintegrujeme třeba $2x_1x_2$:

$$2\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 x_1x_2\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n.$$

Při integraci podle x_1 dostaneme 1/2, při integraci podle x_2 rovněž. Integrace podle všech ostatních souřadnic dá jedničku, takže výsledek je roven $2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Nakonec vidíme, že členů tohoto typu tam máme celkem $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$. Celý integrál je tedy roven

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 (x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n = \frac{n}{3}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{n(3n+1)}{12}.$$