Plošné integrály a integrální věty

1 druhu: $F(x,y,z)$ - skalární funkce 3 prom.

$$\iint_S F(x,y,z)\,ds \quad , \quad S\text{- plocha v prostoru}$$

ds je plošný element definovaný tak, že

$$\iint ds = S = \text{obsah plochy}$$

$\Rightarrow$ Parametrizace plochy: $x = x(u,v)$

$\to$ polohový vektor $\vec{r} = (x,y,z)$ $\quad y = y(u,v)$

$z = z(u,v)$

dvatečné vektory: $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial u}\right)$

$\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial v}\right)$

zkráceně $\vec{r}_u, \vec{r}_v$

pokud je plocha parametrizována fcí

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= F(x,y) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} r_x &= (1,0,F_x) \\ r_y &= (1,0,F_y) \end{aligned}$$

náčrtek:

co je dS? $dS = F(u,v)\,du\,dv$ kde F je zvolené tak že $\iint_S dS =$ obsah plochy

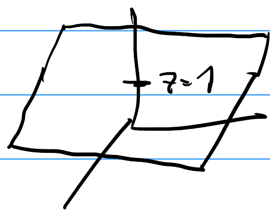
Spočítáme ho z normály $\vec{n}$ ... viz přednáška

$\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$, $dS = \|\vec{n}\|\,du\,dv$

velikost $= \sqrt{\vec{n}\cdot\vec{n}}$

Př: velmi jednoduchá plocha

rovina $z=1$:



1) parametrizace

$$x = x$$
$$y = y$$
$$z = 1 \qquad \text{a } x,y \in (-\infty, \infty)$$

2) tečné vektory: $\vec{r}_x = (1,0,0)$

$\vec{r}_y = (0,1,0)$

3) normálový vektor $\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$

$= (1,0,0) \times (0,1,0) = \underline{(0,0,1)}$

Př: horní polosféra $x^2+y^2+z^2=1$ a $z \geq 0$

dvě možnosti parametrizace

$x = x$
$y = y$
$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ + podmínka $x^2+y^2 \leq 1$

trik s determinantem

máme: $\vec{i} = (1,0,0)$
$\vec{j} = (0,1,0)$
$\vec{k} = (0,0,1)$

determinant

pak $\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & z_u \\ 0 & 1 & z_v \end{vmatrix} =$

$= k - j z_v - i z_u = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1 \right)$

$\Rightarrow ds = \|\vec{n}\| dx dy = \sqrt{1+z_u^2+z_v^2} = \sqrt{1+ \frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} (1-x^2-y^2+x^2-y^2) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

DÚ dokažte že $\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy =$

obsah povrchu horní polosféry $= 2\pi$

2) standardní popis: sférické souř.

$$x = \cos\varphi \sin\vartheta$$
$$y = \sin\varphi \sin\vartheta \qquad \varphi \in (0, 2\pi), \vartheta \in (0, \tfrac{\pi}{2})$$
$$z = \cos\vartheta$$

$$\vec{r}_\varphi = (-\sin\varphi \sin\vartheta, \cos\varphi \sin\vartheta, 0)$$

$$\vec{r}_\vartheta = (\cos\varphi \cos\vartheta, \sin\varphi\cos\vartheta, -\sin\vartheta)$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\varphi\sin\vartheta & \cos\varphi\sin\vartheta & 0 \\ \cos\varphi\cos\vartheta & \sin\varphi\cos\vartheta & -\sin\vartheta \end{vmatrix}$$

Laplaceův rozvoj

$= -k(\sin\vartheta\cos\vartheta) - \sin\vartheta(i\cos\varphi\sin\vartheta +$
$j\sin\varphi\sin\vartheta) = (-\cos\varphi\sin^2\vartheta, -\sin\varphi\sin^2\vartheta,$
$-\sin\vartheta\cos\vartheta)$!!! pozor směřuje dovnitř.

Zkusme něco spočítat:

1) kužel a fce $F(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow$ výběr souřadnic a parametrizace

kužel: $x^2+y^2=z^2$

$$\Rightarrow \quad x = r\cos\varphi \qquad r\in(0,1)$$
$$y = r\sin\varphi \qquad \varphi\in\langle 0,2\pi)$$
$$z = r$$

$\Rightarrow \vec{r_\varphi} = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0)$

$\vec{r_r} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 1)$

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (r\cos\varphi, r\sin\varphi, r)$$

$\|\vec{n}\| = \sqrt{2}\,r$

$$\Rightarrow \iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}\,r^2\,dr\,d\varphi = \underline{\underline{2\pi\frac{\sqrt{2}}{3}}}$$

Int monstrum př 403:

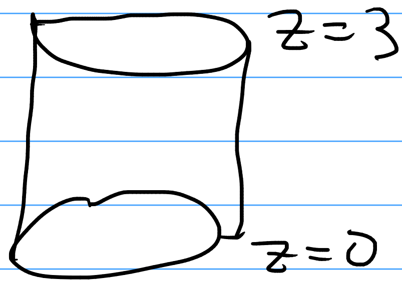
$$\iint_S xy\,dS \quad \text{kde } S: \; x^2+y^2=4$$

$$0\le z\le 3$$

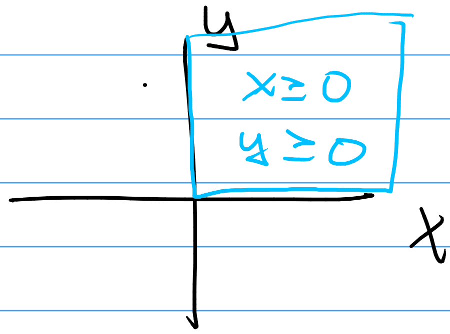
$$x\ge 0$$

$$y\ge 0$$

$x^2+y^2=4$ = válec



→ půdorys:



⇒ válcové souřadnice

$$x^2+y^2=4 \Rightarrow r=2$$

$$0\le z\le 3 \Rightarrow 0\le z\le 3$$

$$\left.\begin{matrix} x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{matrix}\right. \Rightarrow \varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2\sin\varphi & 2\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \to \vec{r}_\varphi \\ \to \vec{r}_z \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\vec{n} = (2\cos\varphi, 2\sin\varphi, 0) \Rightarrow \|\vec{n}\| = 2$$

$$\iint_S xy\,dS = \int_0^{\pi/2}\int_0^3 4\cos\varphi\sin\varphi\cdot 2\,dz\,d\varphi = 12$$

Př: Určete povrch rotačního paraboloidu $z = 6 - x^2 - y^2$ pro $z \geq 0$

$$\Rightarrow \iint_S 1 dS = \iint_M \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx dy$$

kde M je definiční obor $z = z(x,y)$ s podmínkou $z \geq 0$ $\Rightarrow$ $x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

pro $z = 0$ máme $6 = x^2 + y^2 \Rightarrow r \in \langle 0, \sqrt{6} \rangle$
$\varphi \in \langle 0, 2\pi)$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{6}} \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr\, d\varphi = \frac{62}{3}\pi$$

Plošný integrál 2. druhu

- parametrizovaná plocha $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$
- vektorové pole: $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, du dv$$
$$= \iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy$$

důkaz rovnosti je v přednášce

Př: $S \Rightarrow$ sféra

$\vec{F} = (x, y, z)$

$\vec{n}$ jsme počítali: vezmeme vnější $\vec{n}$

$$\vec{n} = (\cos\varphi \sin^2\theta,\ \sin\varphi \sin^2\theta,\ \sin\theta\cos\theta)$$

$$\vec{F}\cdot\vec{n} = \cos^2\varphi \sin^3\theta + \sin^2\theta \sin^3\theta + \sin\theta\cos^2\theta$$

$$= \sin^3\theta + \sin\theta\cos^2\theta = \sin\theta$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 4\pi$$

$= 3 \times$ objem koule $\Rightarrow$

Integrální věty

ve 2D jsme měli Greenovu větu

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\, dx\, dy$$

což lze psát jako

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint \operatorname{rot} \vec{F} \, dx\,dy$$

Věty ve 3D:

1) uzavřená plocha S která ohraničuje objem V, tedy $\partial V = S$, $\vec{F} = (P, Q, R)$ je v. pole které je spojité v celém V.

$$\oiint_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy =$$

$$\iiint_V (P_x + Q_y + R_z)\,dx\,dy\,dz$$

alternativně $\oiint \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint \operatorname{div} \vec{F} \, dx\,dy\,dz$

v předchozím příkladě bylo pole

$\vec{F} = (x, y, z) \quad \operatorname{div} \vec{F} = 3$

$$\Rightarrow \iint_{\text{sféra}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\text{Koule}} \operatorname{div} \vec{F} \, dx\,dy\,dz$$

$= 3$ objem koule ✓

Př: $\vec{F} = (-x, y, 0)$

je tzv. „nezřídlové" pole $\Leftrightarrow$

$\operatorname{div} \vec{F} = 0 \Rightarrow \oiint \vec{F} \, d\vec{S} = 0$ pro

každou uzavřenou plochu S

$\iint \vec{F} \, d\vec{S}$ se také nazývá tok

pole $\vec{F}$ plochou S.

2. věta: <u>Stokesova věta</u>

plocha S a křivka C která je

hranicí této plochy

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S (R_y - Q_z)\,dy\,z +$$

$(P_z - R_x)\, dx dy + (Q_x - P_y)\, dx dy$

alternativně: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$

Pozor $\operatorname{rot} \vec{F}$ je jiná ve 2D a ve 3D:

2D $\vec{F} = (P, Q)$

$\operatorname{rot} \vec{F} = Q_x - P_y$ (skalár)

3D $\vec{F} = (P, Q, R)$

$\operatorname{rot} \vec{F} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$

Př: $\vec{F} = (-z, x, 0)$

S = „přední" polosféra

$r(\varphi, \theta) = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$

$\varphi \in (0, \pi)$, $\theta \in (0, \pi)$

$\Rightarrow$ hranice je kružnice v rovině

$y = 0 \Rightarrow C = (\cos t, 0, \sin t)$ $t \in (0, 2\pi)$

Ověřme Stokesovu větu

$$\oint_C \vec{F}\, d\vec{r} = \iint_{\text{polosféra}} \operatorname{rot}\vec{F} \cdot d\vec{S}$$

LS: $\int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0)(-\sin t\, dt, 0, \cos t\, dt) = \int_0^{2\pi} \sin^2 t = \pi$

PS $= \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} (0, -1, 1) \cdot (\cos\varphi \sin^2\vartheta, \sin\varphi \sin^2\vartheta, \sin\vartheta \cos\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} (-\sin\varphi \sin^2\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta)\, d\varphi\, d\vartheta = \int_0^{\pi} (-2\sin^2\vartheta + \pi \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta)\, d\vartheta$

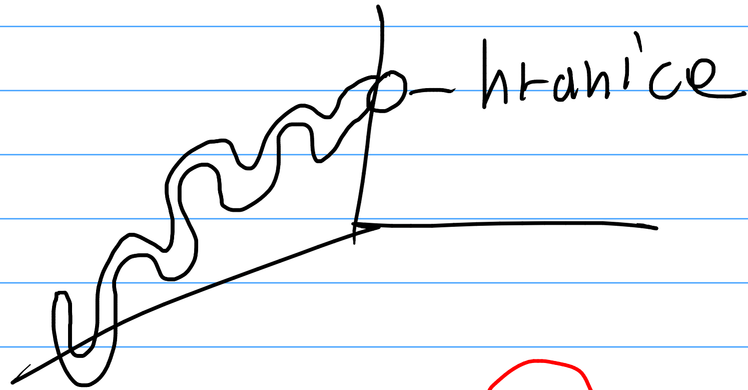
$= \left[-\pi \frac{1}{2}\cos^2\vartheta + \frac{1}{2}\sin 2\vartheta - \vartheta\right]_0^{\pi} = \pi$

stejné ✓

Využití Stokesovy věty

máme-li velmi složitou plochu ale jednoduchou hranici

Př:



$c = (\cos t, \sin t, 1)$

$$\Rightarrow \iint_S \operatorname{rot} \vec{F}\, d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

složité jednoduché

Ale pozor mám zadané $\operatorname{rot} \vec{F}$ a musím přijít z jakého to pochází $\vec{F}$.

Př: $\displaystyle\iint_{\text{složitá plocha}} dy\,dz + dx\,dz + 2y\,dx\,dy$

Lze spočítat?

$\Rightarrow$ víme že $\operatorname{rot} \vec{F} = (1, 1, 2y)$

a hledáme $\vec{F}$! pozor $\vec{F}$ není

určeno jednoznačně

(můžeme přičíst

grad lib fce)

$\vec{F} = (P, Q, R)$ a $R_y - Q_z = 1$

$P_z - R_x = 1$

$Q_x - P_y = 2y$

možné řešení $\vec{F} = (2z, 2xy, x+y)$

$\Rightarrow$ použijeme Stokes větu

$$\int_0^{2\pi} (2, 2\cos t\sin t, \cos t + \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\,dt = \int_0^{2\pi} -2\sin t + 2\cos^2 t\sin t\,dt$$

$$= \left[\cos t - \frac{2}{3}\cos^3 t\right]_0^{2\pi} = 0$$

$\Rightarrow$ podle Stokesovy věty toto platí pro všechny plochy s hranicí $c = (\cos t, \sin t, 1)$

Dú ověřit pro kruh $x = r\cos t$
$y = r\sin t$
$z = 1$
$r \in \langle 0, 1)$
$t \in \langle 0, 2\pi)$

Využití v elektřině:

Maxwelovy rovnice

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\oint \vec{E}\, d\vec{r} \overset{\text{Stokes}}{=} -\frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Faradayův zákon elmag indukce

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} \overset{G-O}{=} \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho\, dV$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

toto je Gausův zákon

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \underset{\partial V}{\oiint} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

libovolné

$\Rightarrow$ zákon neexistence magnetického náboje (mag. monopólu).

doplnění:

Pomocí G-O věty můžeme počítat objemy, chceme abychom zvolily $\vec{F}$ takové, že $\operatorname{div} \vec{F} = 1$

např.: $\vec{F} = (x, 0, 0)$

$$\Rightarrow \underset{\partial V}{\oiint} x\,dy\,dz \overset{G-O}{=} \iiint_V dx\,dy\,dz = V$$

Int monstrum př 445

$\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ V = jednotková krychle

Spočtěte tok krychlí pomocí G-O věty

$$\iint x^2\,dy\,dz + y^2\,dx\,dz + z^2\,dx\,dy$$

toto je integrál přes stěny krychle tedy 6 dvojných integrálů !!! použijeme G-O větu dostaneme pouze 1 trojný integrál ⇒

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (2x+2y+2z)\,dx\,dy\,dz = 3$$

Int monstrum př 447:

$$\iint_S x\,dy\,dz + y^2\,dx\,dz + yz\,dx\,dy$$

kde $S: \quad x^2+y^2=(z-1)^2$

$0 \le z \le 1$

1) co je S?

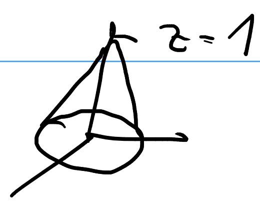
podívejme se řezy $z = c =$ konst.

$x^2+y^2=(c-1)^2 =$ kružnice

pro $z=0 \qquad x^2+y^2=1$

$z=1 \qquad x^2+y^2=0$

⇒ kužel



Pozor tato plocha není uzavřená!

chybí podstava

podstava = kruh $z=0$ $x^2+y^2\leq 1$

označme int přes tuto podstavu jako I_p

$$I_p = \iint_{\text{podstava}} x\,dy\,dz + y^2\,dx\,dz + yz\,dx\,dy$$

$$I_K = \iint_{\text{kužel}} x\,dy\,dz + y^2\,dx\,dz + yz\,dx\,dy$$

součet těchto integrálů je

$$I_p + I_K = \underbrace{\oiint_{\text{uz plocha}} -\,\|\,-}_{\text{zde mohu využít G-O větu}}$$

$$\Rightarrow I_K = \iiint (1+2y+y)\,dx\,dy\,dz - I_p$$

válcové souř: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$

zde je $z=0$

Z rovnice $x^2+y^2=(z-1)^2$ a $0\le z\le 1$

dostaneme $z\in(0,r+1)$

$I_P = 0$ (díky $z=0$) !

$$I_K = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{r+1} (1+3r\sin\varphi)\, r\, dz\, dr\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r+3r^2\sin\varphi)(r+1)\, dr\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^2+r+3(r^3+r^2)\sin\varphi\right) dr\, d\varphi$$

$$= 2\pi\left[\frac{r^3}{3}+\frac{r^2}{2}\right]_0^1 + 3\underbrace{\left(-\cos\varphi\right)_0^{2\pi}}_{0}\left[\frac{r^4}{4}+\frac{r^3}{3}\right]_0^1$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Využití v elmag:

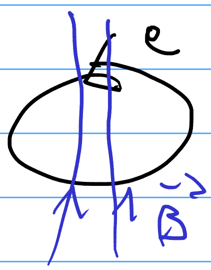
Elektrické pole bodového náboje

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\vec{r}_0 = \frac{kQ}{r^3}\vec{r}$$

Faraday zákon

$$\oint \vec{E}\, d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\iint \vec{B}\, ds$$

$\vec{r}$



smyčka $x = \cos t$
$y = \sin t$
$z = 0$

$$\oint \vec{E}\, d\vec{r} = \int_0^{2\pi} -kQ\sin t + kQ\cos t = 0$$

$\to$ $\Phi_B = \iint \vec{B}\, d\vec{s}$ je konstantní

Gauss zákon: $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\oint\!\!\oint_{\partial V} \vec{E}\, d\vec{s} = \iiint \mathrm{div}\,\vec{E}\, dv = \frac{Q_{celk}}{\varepsilon_0}$$

ALE G-O věta platí pouze pro spojité pole což $\vec{E}$ není!

a G-O neplatí: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{3}{r^5}(x^2+y^2+z^2 - (x^2+y^2+z^2)) = 0$

a víme že $\iiint \operatorname{div} \vec{E} \, dV$ vyjde Q_{celk} a ne 0 $\Rightarrow$

předpoklad spojitosti v G-O větě je důležitý!