Cvičení 4

1) řešení písemky

$\rho(x,y) = |x^4 - y^4|$ není metrika protože nesplňuje pravidlo $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Protože když $x = -y$ pak $\rho(x,y) = 0$

Př: $x = -1, y = 1$

$$\rho(-1,1) = |(-1)^4 - 1^4| = |1 - 1| = 0$$

$\rho(x,y) = |x^3 - y^3|$

axiom 1: $\rho(x,y) \geq 0$ ✓ díky abs. hodnotě

$\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

$\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x^3 - y^3| = 0 \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 0$

-> řešíme pro x

$$x^3 - y^3 = 0$$

$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 0 \Rightarrow x = y$ nebo $x^2 + xy + y^2 = 0$

$x^2 + xy + y^2 = 0$ řeším jako kvadratickou rci pro x jako proměnnou a y jako parametr.

-> $D = y^2 - 4y^2 = -3y^2 < 0 \Rightarrow$ žádná reálná řešení

$\Rightarrow x = y$ jediné řešení -> první axiom platí

axiom 2: $\rho(x,y) = \rho(y,x) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

$$\rho(x,y) = |x^3 - y^3| = |(-1)\cdot(y^3 - x^3)| = |(-1)|\cdot|y^3 - x^3|$$
$$= |y^3 - x^3| = \rho(y,x) \checkmark$$

axiom 3: $\rho(x,y)+\rho(y,z)\geq\rho(x,z)\quad\forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$

$$\rho(x,z)=|x^3-z^3|=|x^3-z^3+y^3-y^3|\leq|x^3-y^3|+$$

$$+|-z^3+y^3|=\rho(x,y)+\rho(y,z)\checkmark$$

kde jsem použil vlastnost abs. hodnoty, že

$|a+b|\leq|a|+|b|$

2 část: $A=(1,\infty)$ je otevřená v metrice ρ_2 protože posloupnost $x_n=1+\frac{1}{n}$, leží v A pro všechna $n\in\mathbb{N}$ ale konverguje do bodu 1, který v A neleží. Důkaz: $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,1)=\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^3-1^3\right|$

toto je define konvergence posloupnosti v metrice!

$$=\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}-1\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\underset{\downarrow 0}{\frac{3}{n}}+\underset{\downarrow 0}{\frac{3}{n^2}}+\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{n^3}}\right|$$

$$=0\ \checkmark$$

vzdálenost x_n od 1 se blíží k 0 → posl konverguje do bodu 1.

$\operatorname{hr} A=\{1\}$; $A=A^\circ$ → otevřená

- co je průměr množiny $B=[-2,2]$

viz přednáška definice 14:

$$\operatorname{diam} B=\sup_{x,y\in B}\rho(x,y)$$

⇒ „největší možná vzdálenost 2 bodů množiny"

zde to budou krajní body $x=-2$
$y=2$

$$\operatorname{diam} B = \varrho(-2,2) = |(-2)^3 - 2^3| = |-8-8| = |-16| = 16$$

Cvičení:

2) doplnění/ujasnění limit:

! Počítaním limit L_{xy}, L_{yx} a limit po křivkách $y = kx$, $y = kx^2, \dots$ nikdy nemůžeme dokázati, že limita existuje, pouze existenci limity vyvrátit.

jediný způsob jak existenci limity dokázat (kromě použití definice) je věta 1 z přednášky:

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ je rovna L jestliže existuje funkce $g: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ jedné proměnné s vlastností $\lim\limits_{r\to 0^+} g(r) = 0$ tak, že existuje $r_0 > 0$, takové že pro $\forall r \in (0, r_0]$ platí

$$|f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) - L| < g(r) \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi)$$

$\Rightarrow$ jednodušeji řečeno pokud limita dává smysl v polárních souřadnicích a <u>NEZÁVISÍ</u> na φ

$\rightarrow$ př: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ (z minula $\rightarrow$ neexistuje díky $y = kx^2$)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$ v polárních souřadnicích

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^4\cos^4\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r\cos^2\varphi\sin\varphi}{\underbrace{r^2\cos^2\varphi}_{\to 0} + \sin^2\varphi} =$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \underbrace{r}_{\to 0} \underbrace{\frac{\cos^2\varphi\sin\varphi}{\sin^2\varphi}}_{\to\infty \text{ pro } \varphi = 0, \pi}$$

ok.

$\to$ nelze omezit $\to$ nelze použít větu 1 a o limitě nemůžeme nic říct.

další příklad:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r^4\cos^4\varphi + r^2\sin^2\varphi}$$

$$= \lim_{r\to 0^+} r\,\frac{\cos\varphi\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi} = \lim_{r\to 0^+} r\cos\varphi = 0$$

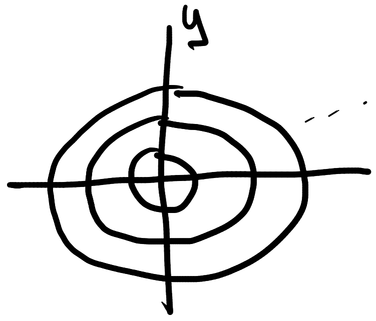
Použili jsme větu 1.

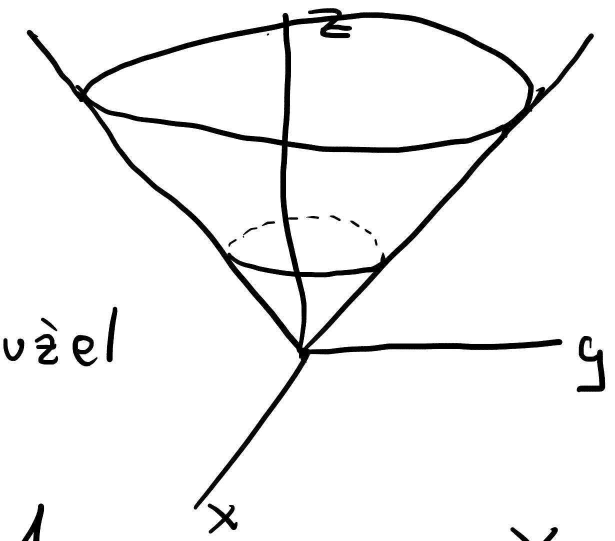
je omezená (nedělíme 0 narozdíl od minulého př.)

3) derivace

Funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

- vrstevnic $\sqrt{x^2+y^2} = c \to x^2+y^2 = c^2$ jsou kružnice





- graf : $z = F(x,y) \rightarrow$ kužel
- parciální derivace:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Pro smíšené parciální derivace platí symetrie

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$ $\rightarrow$ kontrola:

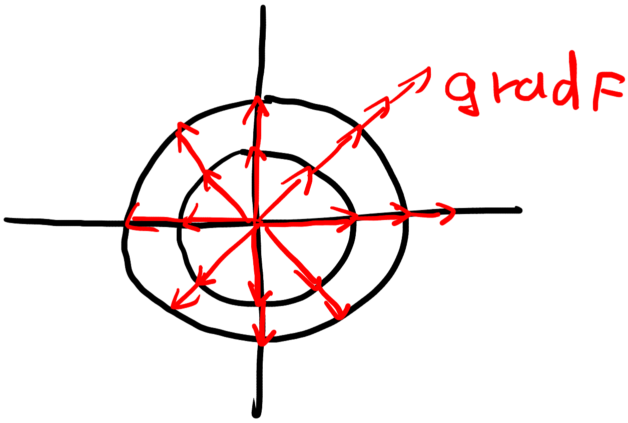
1) $$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{1}{2}xy(x^2+y^2)^{-3/2}$$

2) $$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = -\frac{1}{2}yx(x^2+y^2)^{-3/2}$$

opravdu jsou stejné ✓

- $\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ je vektorové pole kolmé na vrstevnice



• diferenciál $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$

nebo se dá psát jako $dF = (\overrightarrow{\text{grad} F}) \cdot (d\vec{x})$

kde $d\vec{x} = (dx, dy)$

dF můžeme využít k přibližnému určení hodnot

např: $\sqrt{(1{,}98)^2 + (4{,}03)^2} = ?$

$x_0 = 2,\ y_0 = 4$ to co známe

$x = 1{,}98,\ y = 4{,}03$ to co chceme

$$F(x,y) \approx F(x_0,y_0) + dF(x_0,y_0)$$

$$\approx \sqrt{2^2+4^2} + \frac{2}{\sqrt{20}} \underbrace{(-0{,}02)}_{x-x_0 = dx} + \frac{4}{\sqrt{20}} 0{,}03$$

$$\approx \sqrt{20} + \frac{0{,}08}{\sqrt{20}} = 4{,}49003$$

vs skutečná hodnota $= 4{,}4901$

• směrová derivace

$\frac{\partial F}{\partial x}$ je změna ve směru $(1,0)$ (osy x)

$\frac{\partial F}{\partial y}$ ve směru $(0,1)$ (osy y) $\Rightarrow$

Co v obecném směru?

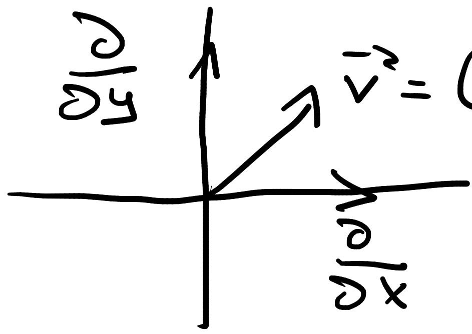
Směr: $\vec{v}$ (nejlépe normovaný)

$$\partial_{\vec{v}} F = \frac{d}{dt} F(\vec{x} + t\vec{v})\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} F(x+tv_x, y+tv_y)\Big|_{t=0}$$

nebo $\partial_{\vec{v}} F = (\overrightarrow{\mathrm{grad}\, F}) \cdot \vec{v}$

DÚ - dokažte, že vzorce se shodují.
- pomocí druhé definice dokažte, že grad F je směr největšího růstu funkce F.

Př:



$\vec{v} = (1,1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ ← normování

Pro $F = \sqrt{x^2+y^2}$; $\partial_{\vec{v}} F = ?$

$$\partial_{\vec{v}} F = \frac{d}{dt} F(x+tv_x, y+tv_y)\Big|_{t=0}$$

Pouze dosadíme $\vec{v}$ do definice

$$= \frac{d}{dt} \sqrt{\left(x+\tfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 + \left(y+\tfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2}\;\Bigg|_{t=0}$$

$$= \left[\frac{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 + \left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2}}\right]_{t=0}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

• tečná rovina ke grafu funkce $F(x,y)$ v bodě (x_0,y_0)

rovina: $z = ax + by + c$

tečná rovina:

$$z = F(x_0,y_0) + \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$$

Př: • $(x_0,y_0) = (1,1)$

$$z = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(y-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$$

• $(x_0,y_0) = (2,2)$

$$z = \sqrt{8} + \frac{2}{\sqrt{8}}(x-2) + \frac{2}{\sqrt{8}}(y-2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$$

$\Rightarrow$ stejné roviny.

DÚ dokažte, že rovina v obecném bodě je pouze rotace roviny $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$

nápověda: nakreslete si obrázek s kuželem.

DÚ nalezněte další příklady ve stud. mater. středeční cvičení (D. Cidlinský) cvičení 3

4) Kmenové funkce, exaktní dif. rce

otázka: kdy je výraz

$$a(x,y)dx + b(x,y)dy$$

diferenciálem nějaké funkce $F(x,y)$?

tedy kdy $a(x,y)dx + b(x,y)dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$

využijeme $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}}$

→ lze pak použít k řešení dif rcic

typu $y' = -\frac{a(x,y)}{b(x,y)} \Leftrightarrow a(x,y)dx + b(x,y)dy = 0$

$\Leftrightarrow dF = 0$ a tedy $F = \text{konst}$ je řešení

př: $ydx + xdy = 0$

$a = y$
$b = x$ $\quad \exists$ fce F? $\quad \frac{\partial a}{\partial y} = 1 = \frac{\partial b}{\partial x}$ ✓

Ano existuje a dostaneme

ji integrací:

$$a = \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$y = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \Big| \int dx \quad \Rightarrow$$

$$F = \int y\,dx = y\cdot\int 1\,dx = y\cdot x + \underbrace{C(y)}_{\text{lib Fce pouze } y}$$

lib Fce pouze y (nelze určit integrací $\int dx$)

$\Rightarrow$ C získame ze vztahu: $\frac{\partial F}{\partial y} = b$

$$x + C'(y) = x$$

$$\Rightarrow C'(y) = 0 \quad C(y) = k, \; k \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow F = x\cdot y + C$ a $x\cdot y = C, \; C \in \mathbb{R}$ je řešení dif rce.

• těžší rovnice: $\underbrace{y(1+xy)}_{a(x,y)}dx \underbrace{-x}_{b(x,y)}dy = 0$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = 1+2xy \neq \frac{\partial b}{\partial x} = -1$$

neplatí ale co když rovnici vynásobíme integračním faktorem $\frac{1}{y^2}$

$$\Rightarrow \frac{1+xy}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$$

teď $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{(1+xy) - yx}{y^2} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial b}{\partial x}$ ✓

$\Rightarrow$ můžeme najít F:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = b = -\frac{x}{y^2}$$

$$F = \int -\frac{x}{y^2}\,dy = \frac{x}{y} + C(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = a \Rightarrow \frac{1}{y} + C'(x) = \frac{1+xy}{y}$$

$$\Rightarrow C'(x) = x \rightarrow C(x) = \frac{x^2}{2} + C$$

$\Rightarrow$ implicitní řešení rce $dF = 0$ je $F = C$

$$\boxed{\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C}$$

5) složené parciální derivace

- máme funkci $F(x,y) = \ln\sqrt{x^2-y^2}$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{x^2-y^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-y}{x^2-y^2}$$

co kdybychom měli jiné souřadnice?

$$u = x+y, \quad v = x-y$$

Funkce v nových proměnných:

$$F(x,y) = F(u(x,y), v(x,y)) = \ln\sqrt{u \cdot v}$$

Vzorec pro parciální derivace složené funkce

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

+ stejně pro y.

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{u\cdot v}} \cdot \frac{v}{2\sqrt{u\cdot v}} + \frac{1}{\sqrt{u\cdot v}} \cdot \frac{u}{2\sqrt{u\cdot v}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{v+u}{u\cdot v} = \frac{x}{x^2-y^2} \quad \checkmark \text{ sedí}$$

6) Taylorův polynom

obdobně jako pro funkci 1 proměnné

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)$$

stejné jako diferenciál

díky symetrii druhých derivací

$$+\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) \Bigg| + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0) + 2\frac{\partial^2 F(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}\right.$$

$$\left.\cdot (x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 F(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right] + \dots$$

$\Rightarrow$ můžeme např. určit $\sqrt{(1{,}98)^2+(4{,}03)^2}$

přesněji $\approx \sqrt{20} + \frac{0{,}108}{\sqrt{20}} + 0{,}0001 \sim 4{,}49004$

$\Rightarrow$ lepší