7 cvičení

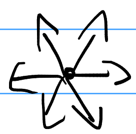
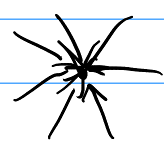
Vektorová pole

- minule ve 2D
- teď ve 3D

$$\vec{F} = (y, x, z)$$

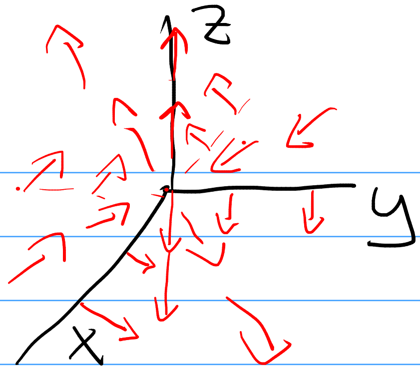
- Jacobi $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\operatorname{div} \vec{F} = 0 + 0 + 1 = 1$
- rotace : $\overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{F}} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} , \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} , \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = (0, 0, 0)$

terminologie

- pokud $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ říkáme že F je nezřídbové
- zřídb :  nebo 

vír: 

- pokud $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ $\vec{F}$ je nevírové, konservativní vizualizace



když rotace $= 0$ tak nutně je pole $\vec{F}$ gradientem nějaké funkce $f(x,y,z)$

$$\vec{F}(x,y,z) = \operatorname{grad} f(x,y,z)$$

a to protože platí pro libovolnou fci g $\boxed{\operatorname{rot} \operatorname{grad} g = 0}$

DÚ zkuste dokázat.

Fci f se říká potenciál.

Jak ho zjistíme?

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = F_x \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = y \Rightarrow f = y \cdot x + C(y,z)$$

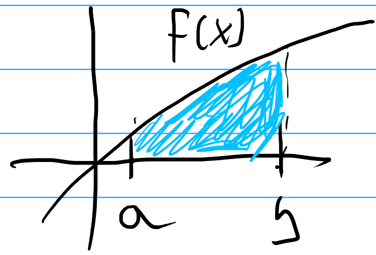
$$\frac{\partial f}{\partial y} = F_y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x \Rightarrow f = x \cdot y + D(x,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = F_z \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = z \Rightarrow f = \frac{1}{2} z^2 + E(x,y)$$

$$\Rightarrow \boxed{f = x \cdot y + \frac{1}{2} z^2}$$

Vícerozměrné integrály

Připomenutí $\int_a^b f(x)\,dx = $ plocha

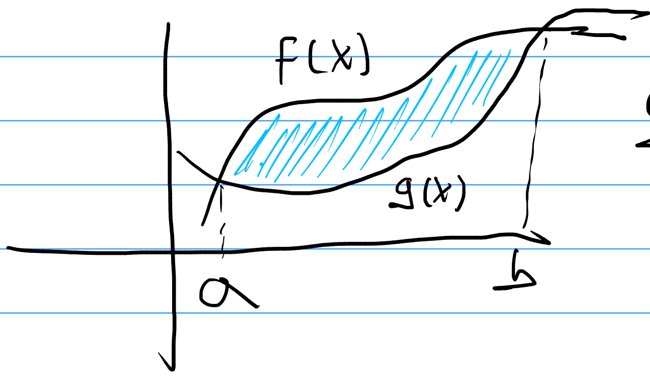


lze zapsat i jako integrál z fce 2 proměnných

a to jako $\int_a^b \left(\int_0^{f(x)} 1\,dy \right) dx$

integrujeme postupně!

• můžeme měřit obsah množin mezi 2mi funkcemi



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{f(x)} 1\,dy \right) dx$$

co je tedy $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy$? $\Rightarrow$

objem mezi funkcí $z = f(x,y)$ a rovinou xy

$\rightarrow$ lze také zapsat jako

$$\int_a^b \int_c^d \left(\int_0^{f(x,y)} 1\,dz \right) dx\,dy$$

Fubiniho věta:

nechť $F(x,y)$ je spojitá na množině A

$$A = \{[x,y] : a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

kde $g,h : [A,B] \to \mathbb{R}$ jsou spojité

pak

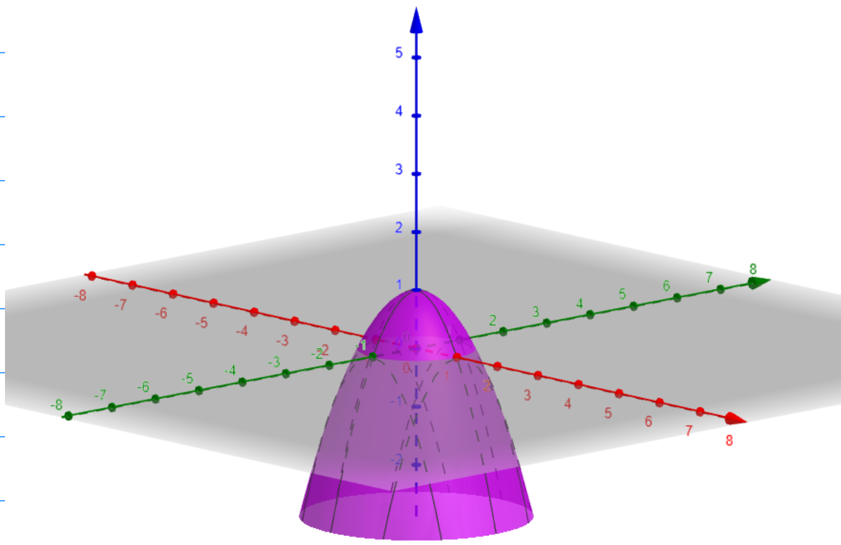
$$\iint_A F(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} F(x,y)\,dy \right) dx$$

podobně pro $x \Leftrightarrow y$ viz přednáška

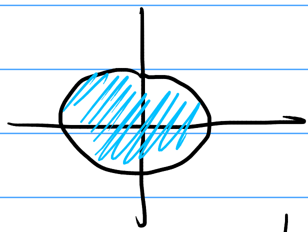
$\Rightarrow$ strategie: musíme mít fci $F(x,y)$ a omezení na její definiční obor a pak integrujeme dva jednorozměrné integrály

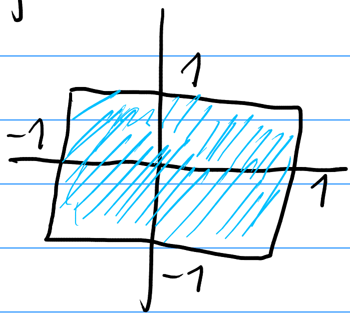
Příklad: $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

paroboloid:



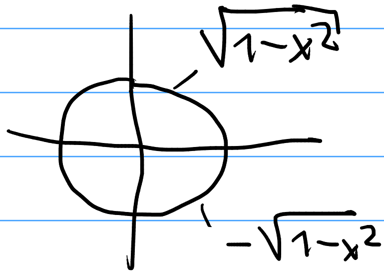
Spočteme: $$\iint_A 1-x^2-y^2\,dx\,dy$$

na 1) $A=$  $x^2+y^2\le 1$

2) $A=$ 

$-1\le x\le 1$

$-1\le y\le 1$

1) $A=$ 

$\Rightarrow$ použijeme Fubiniho větu $\Rightarrow$

$$\iint_A 1-x^2-y^2\,dx=\int_{-1}^{1}\underbrace{\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}1-x^2-y^2\,dy\right)}_{\text{počítáme jako první}}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[y-yx^2-\frac{y^3}{3}\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}2\sqrt{1-x^2}-2x^2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}\,dx$$

$\Rightarrow$ spočítáme každý zvlášť.

• $$2\int_{-1}^{1}\overbrace{\sqrt{1-x^2}}^{\text{sudá fce}}\,dx = 4\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x=\sin\varphi \\ dx=\cos\varphi \end{matrix}\right.$$

$$= 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi = 2\int_{0}^{\pi/2} 1+\cos 2\varphi\,d\varphi$$

$$= \pi + \left[\sin 2\varphi\right]_{0}^{\pi/2} = \underline{\underline{\pi}}$$

• $$-4\int_{0}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x=\sin\varphi \\ dx=\cos\varphi \end{matrix}\right|$$

$$= -4\int_{0}^{\pi/2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = -\int_{0}^{\pi/2}(\sin 2\varphi)^2\,d\varphi$$

$$= -\int_{0}^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}\left[\sin 4\varphi\right]_{0}^{\pi/2} = -\frac{\pi}{4}$$

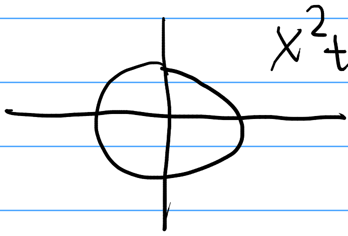
• $$-\frac{4}{3}\int_{0}^{1}(1-x^2)^{3/2}\,dx = \left|\begin{matrix} x=\sin\varphi \\ dx=\cos\varphi \end{matrix}\right| = -\frac{4}{3}\int_{0}^{\pi/2}\cos^4\varphi\,d\varphi$$

$$= -\frac{1}{3}\int_{0}^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)^2\,d\varphi = -\frac{\pi}{6} \underbrace{- \frac{1}{3}\int_{0}^{\pi/2} 2\cos 2\varphi}_{0} - \frac{1}{3}\int_{0}^{\pi/2}\cos^2 2\varphi\,d\varphi$$

$$= -\frac{\pi}{6} - \int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{6}(1+\cos 4\varphi)\,d\varphi = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}$$

$\Rightarrow$ celkově $\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$

Když používáme goniometrickou substituci nemůžeme rovnou změnit proměnné?

$A =$  $x^2+y^2 \le 1$

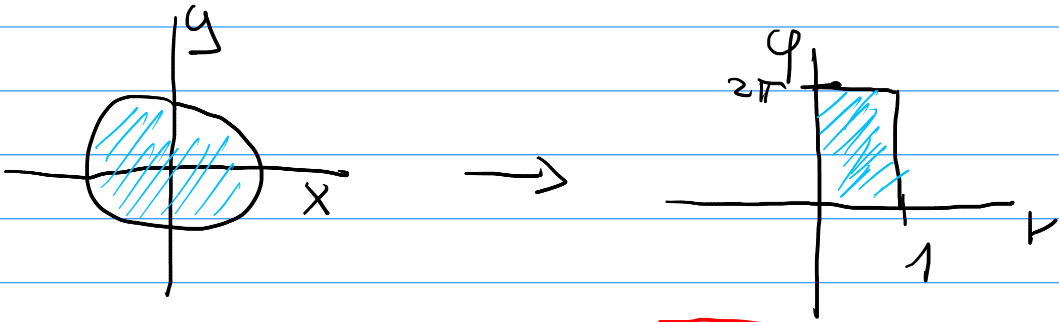
polární souřadnice

$F(x,y) = 1-x^2-y^2$

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

$F(x,y) \to F(r,\varphi) = 1-r^2$

$A \to \{[r,\varphi],\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$



ale co uděláme s $\boxed{dxdy}$?

Věta o transformaci integrálu (přednáška)

$$dxdy = J(r,\varphi)\,dr\,d\varphi$$

J = jakobián transformace $x(r,\varphi), y(r,\varphi)$

$$J = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$

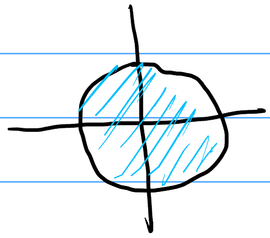
$\Rightarrow dxdy = r\,dr\,d\varphi$

$$\Rightarrow \iint_A F(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)\,r\,dr\,d\varphi$$

$$= 2\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Objem „kouli"

2D:



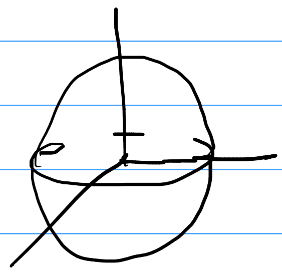
$$\iint_{B^2} 1\,dx\,dy = \pi R^2$$

polární souřadnice

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \iint_{B^2} 1\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\varphi = 2\pi\,\frac{R^2}{2} = \pi R^2 \checkmark$$

3D



sférické souřadnice

$$x = r\cos\varphi\sin\theta$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = r\cos\theta$$

$$\mathrm{Jac} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^4\cos\theta\left(-r^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta - r^2\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta\right)$$

$+ (-1)^6 (-r\sin\theta)(r\cos^2\varphi\sin^2\theta + r\sin^2\varphi\sin^2\theta)$

$= -r^2\sin\theta\cos^2\varphi - r^2\sin\theta\sin^2\theta$

$= -r^2\sin\theta$

$$\Rightarrow \iiint_{B^3} dx\,dy\,dz = \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^R |-r^2\sin\theta|\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^\pi \frac{R^3}{3}\sin\theta\,d\theta = 2\pi\left[-\frac{R^3}{3}\cos\theta\right]_0^\pi$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3$$

• ve 4D viz přednáška $(r, \varphi, \theta_1, \theta_2)$

$$x = r\cos\varphi\sin\theta_1\sin\theta_2$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta_1\sin\theta_2$$
$$z = r\cos\theta_1\sin\theta_2$$
$$w = r\cos\theta_2$$

DÚ zkuste
- spočítat Jac
- zintegrovat 1 přes

$0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$

$0 \le \theta_1, \theta_2 \le \pi$

měli byste dostat $V = \frac{1}{2}\pi^2 R^4$

obecný vzorec: $V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} R^n$

DÚ spočtete pomocí integrálů objem a obsah pláště kužele o výšce h.