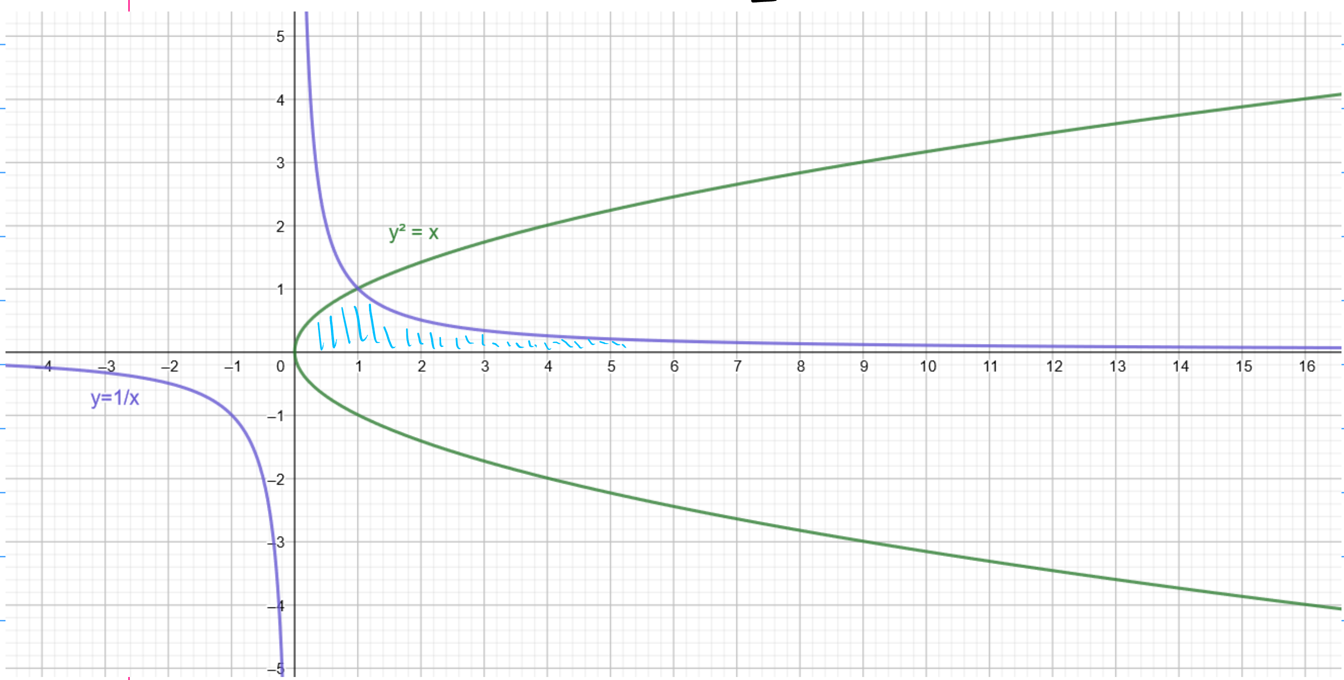
8 cvičení | Vícerozměrné integrály

1) 2D

a) Měření množin: Integrujeme $f(x,y)=1$ přes omezený definiční obor A
$\Rightarrow$ dostaneme velikost množiny A

stejné jako integrace 1 proměnné

Př: Plocha mezi grafy



musíme napsat množinu A jako:

$$x_0 \leq x \leq x_1$$
$$f(x) \leq y \leq g(x)$$

což je v našem případě

$$0 \leq x < \infty$$

ale y musíme rozdělit podle průsečíku

$$\frac{1}{x} = \sqrt{x} \Rightarrow 1 = x^{3/2} \Rightarrow \boxed{x=1,\ y=1}$$

$\Rightarrow$ množina A: pro $0 \leq x \leq 1$

$0 \leq y \leq \sqrt{x}$

a pro $1 \leq x < \infty$

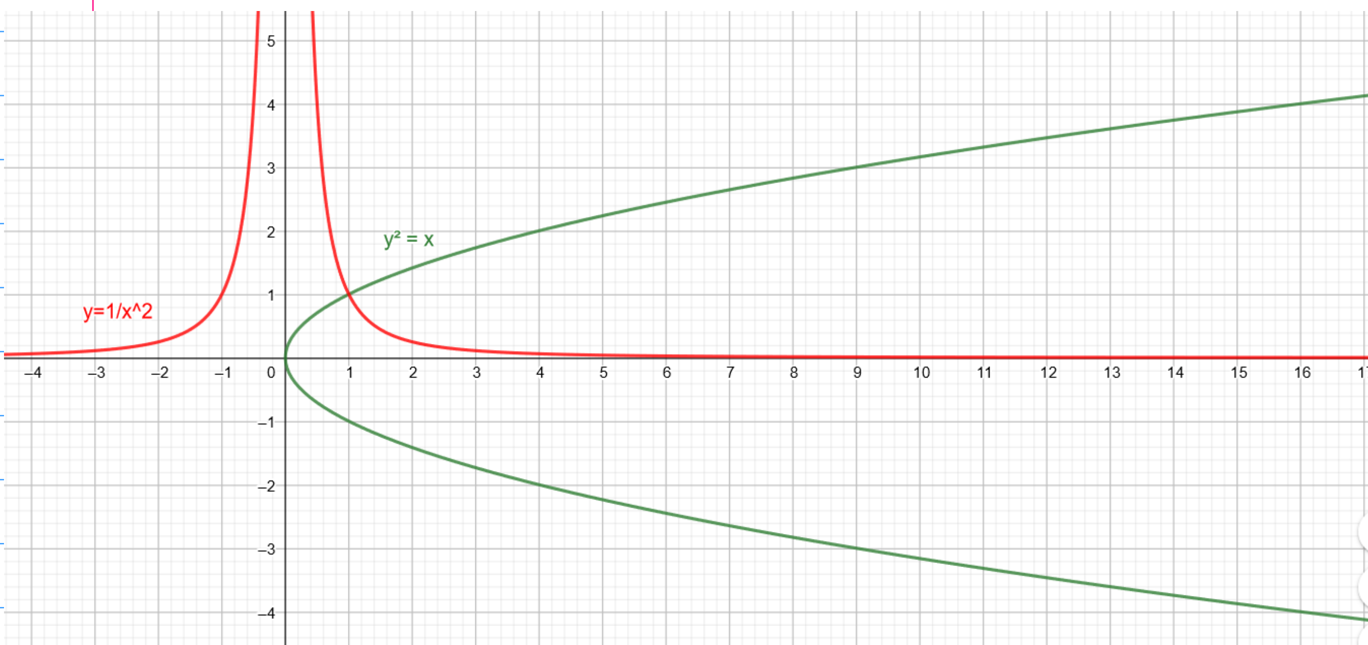
$0 \leq y \leq 1/x$

$$\Rightarrow \text{obsah } A = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} 1 \, dy \, dx + \int_1^\infty \int_0^{\frac{1}{x}} 1 \, dy \, dx =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x} \, dx + \int_1^\infty \frac{1}{x} \, dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2}\right]_0^1 + \left[\ln x\right]_1^\infty$$

$$= \frac{2}{3} + \lim_{x \to \infty} \ln x - \ln 1 = \frac{2}{3} + \infty - 0 = \underline{\underline{\infty}}$$

$\Rightarrow$ co kdybychom fci trochu zmenšili?



stejný výpočet až na $\frac{1}{x} \to \frac{1}{x^2}$

$$\int_0^1 \sqrt{x} \, dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx = \frac{2}{3} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty$$

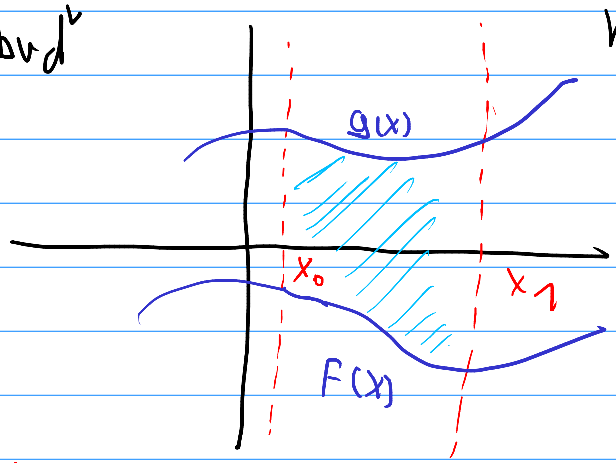
$$= \frac{2}{3} + 0 + 1 = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$$

b) Záměna integračních mezí / proměnných

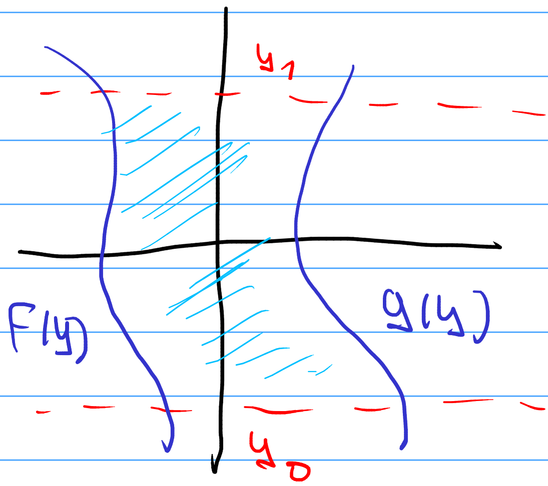
množiny můžeme zapsat ekivavalentně i jako

$$F(y) \le x \le g(y)$$
$$y_0 \le y \le y_1$$

buď



nebo



Příklady

Zaměňte pořadí integrace

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} F(x,y)\,dy\,dx$$

musíme vyřešit $y=\sqrt{2x-x^2}$ vzhledem k x

$y^2 = 2x - x^2$

$x^2 - 2x + y^2 = 0$ — diskriminant $D = 4-4y^2$

doplnění na čtverec

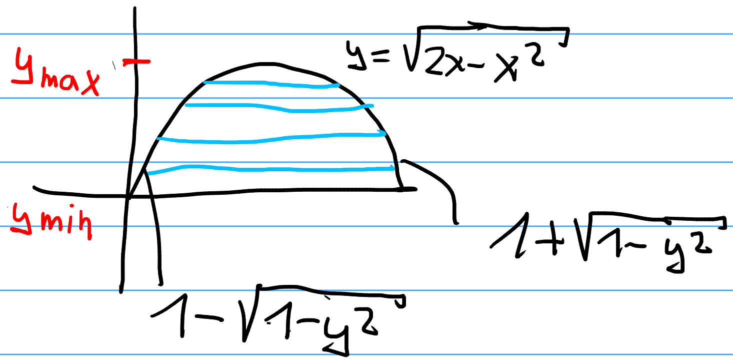
$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4y^2}}{2}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-y^2}$$

$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 = 0$

$(x-1)^2 = 1 - y^2 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-y^2}$

dve rešení protože graf vypadá takto:



ale co y?

původně $0 \leq x \leq 2$
$0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}$

po záměně $1-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1+\sqrt{1-y^2}$
$? \leq y \leq ?$

pomůžeme si z grafu

$y_{min} = 0$
y_{max} je pro $x=1$
což je $\sqrt{2\cdot 1 - 1^2} = 1$

$= \quad 0 \leq y \leq 1$

DÚ

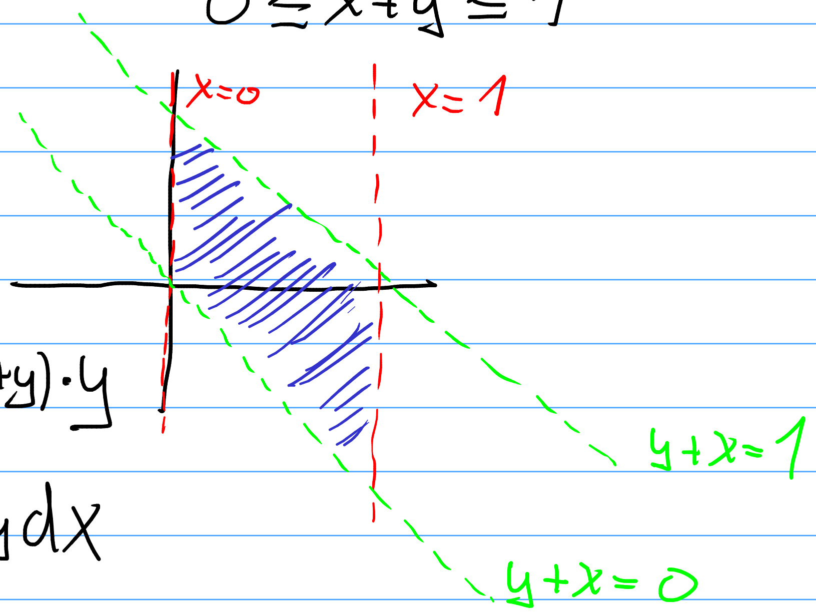
- proveďte záměnu pořadí integrace pro předchozí příklad
- spočtete velikost množiny v tomto příkladě, které pořadí je snažší?

c) Integrace fce 2 proměnných

$\iint_A f(x,y)\,dy\,dx =$ objem mezi množinou A (v rovině $z=0$) a fcí $z=f(x,y)$

Příklad množina A: $0 \leq x \leq 1$
$0 \leq x+y \leq 1$

$\Rightarrow$ Kosodélník



Fce: $f(x,y) = (x+y)\cdot y$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_{-x}^{1-x} (x+y)\cdot y \, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{-x}^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{1}{3}(1-x)^3 + \frac{x^3}{3} \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) - \frac{1}{12}(x-1)^4 - \frac{x^4}{24} \right]_0^1$$

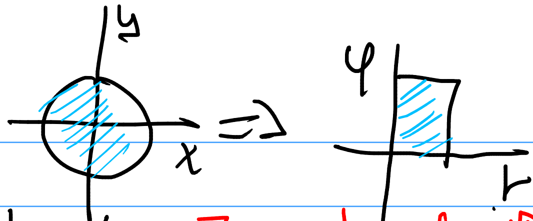
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{12} - \frac{1}{24}$$

$$= \frac{1}{12}$$

Lepší způsob: vždy je lepší integrovat přes A které je obdélník $\begin{matrix} x_0 \leq x \leq x_1 \\ y_0 \leq y \leq y_1 \end{matrix}$

existuje změna proměnných která to zařídí?

$$\begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq x+y \leq 1 \end{matrix} \Rightarrow \left| \begin{matrix} x = u \\ x+y = v \end{matrix} \right| \Rightarrow \begin{matrix} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{matrix}$$

Př: polární souřadnice 

ale pozor musíme spočítat Jacobián!

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

naše trans: $x = u$

$y = v - u$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad J = 1 \Rightarrow dx\,dy = du\,dv$$

$$\int_0^1 \int_0^1 v(v-u)\,dv\,du = \int_0^1 \left[\frac{v^3}{3} - \frac{v^2}{2}u\right]_0^1 du$$

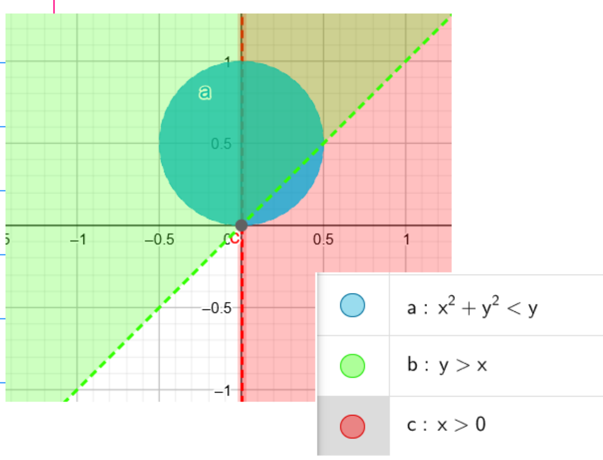
$$= \int_0^1 \frac{1}{3} - \frac{1}{2}u \; du = \left[\frac{1}{3}u - u^2\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 1$$

$$= -\frac{2}{3} \neq \frac{1}{12} \;!$$

Pozor změna proměnných musí být prosté zobrazení!

Př 2: $\iint_M F(x,y)\,dy\,dx$

$M: x^2 + y^2 \leq y,\; y \geq x,\; x \geq 0$



Použijte vhodnou substituci

Zkusíme polární souřadnice

$x = r\cos\varphi,\; y = r\sin\varphi$

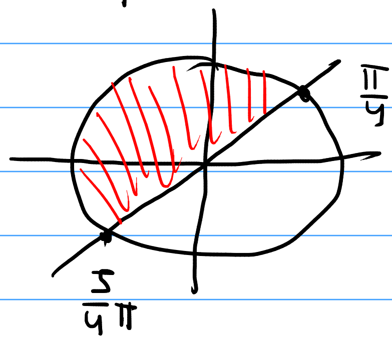
→ 3 nerovnice $\quad x^2+y^2 \le y \to r^2 \le r\sin\varphi$

$y \ge x \to \sin\varphi \ge \cos\varphi$

$x \ge 0 \to r\cos\varphi \ge 0$

• $r^2 \le r\sin\varphi \Rightarrow \boxed{r \le \sin\varphi}$

• $\sin\varphi \ge \cos\varphi \quad (\sin\varphi = \cos\varphi$ pro $\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi)$



$\Rightarrow \varphi \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi \right\rangle$

• $r\cos\varphi \ge 0 \Rightarrow \cos\varphi \ge 0 \Rightarrow \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Chceme průnik

$\Rightarrow M \to \quad 0 \le r \le \sin\varphi$

$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$$\iint_M F(x,y)\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin\varphi} r\,F(r,\varphi)\,dr\,d\varphi$$

DÚ spočtete tento integrál pro

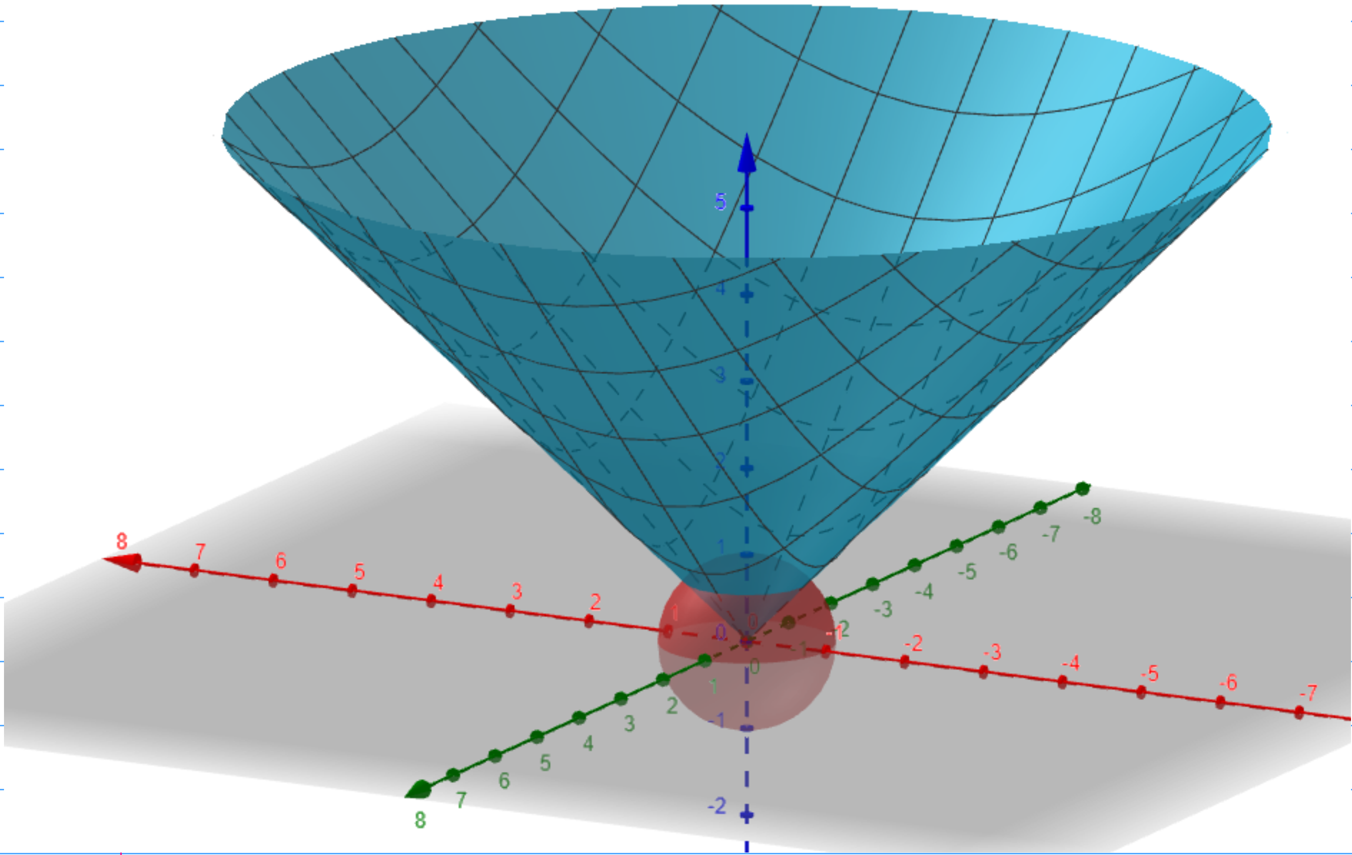
1) $F(x,y) = 1$

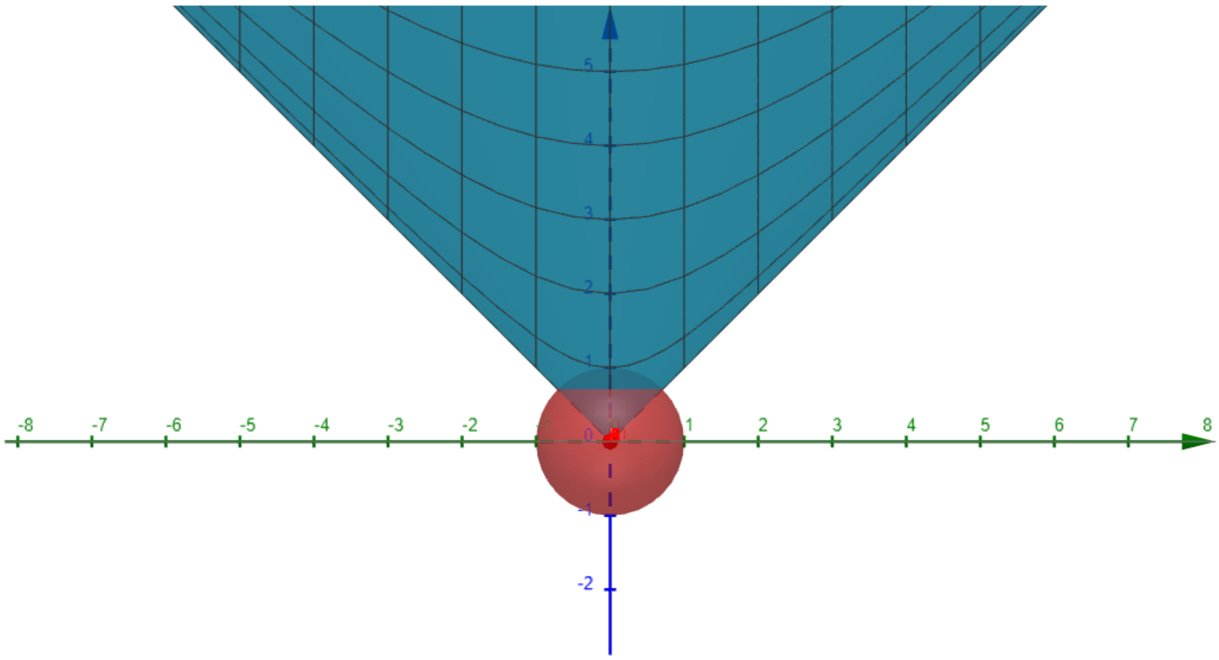
2) $F(x,y) = xy$

3) $F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

2) 3D integrály

Průnik kužele a koule





Integrujeme jedničku ale musíme použít dobré proměnné a dobře množinu parametrizovat

Koule: $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ Kužel $x^2+y^2-z^2=0$

$$\Rightarrow \quad -1 \leq x \leq 1$$
$$-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$
$$-\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$-1 \leq x \leq x$$
$$-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$
$$0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

1 pokus válcové souřadnice

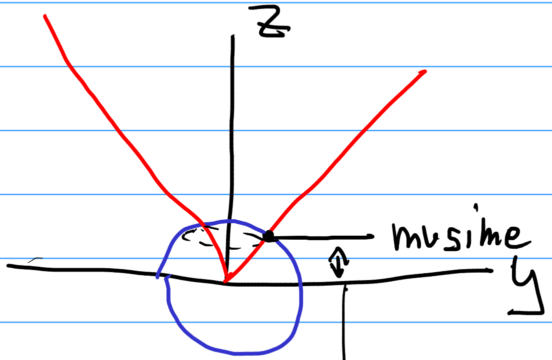
$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$

Koule:

$$0 \leq r \leq 1$$
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$
$$-\sqrt{1-r^2} \leq z \leq \sqrt{1-r^2}$$

Kužel

$$0 \leq r \leq 1$$
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$
$$0 \leq z \leq r$$

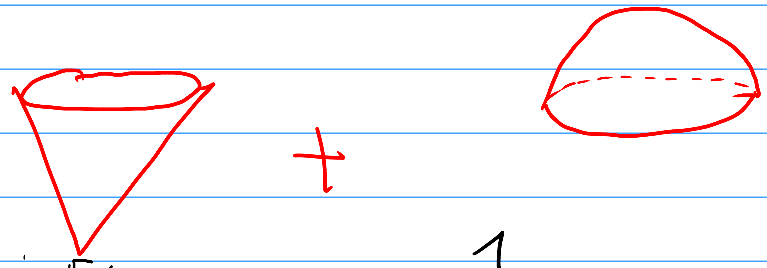


musíme spočítat a integrál rozdělit

nastane pro $r = \sqrt{1-r^2}$

$$r^2 = 1 - r^2$$
$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\int_0^{r} r\,dz\,dr\,d\varphi+\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{1}\int_r^{\sqrt{1-r^2}} r\,dz\,dr\,d\varphi$$



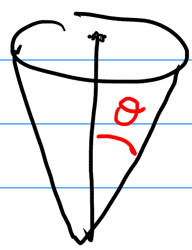
$$=2\pi\int_0^{\sqrt2/2} r^2\,dr+2\pi\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{1} r\left(\sqrt{1-r^2}-r\right)dr$$

$$=\frac{2\pi}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^3+2\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt2}{2}}^{1}-\pi\,\frac{2}{3}\left[(1-r^2)^{3/2}\right]_{\frac{\sqrt2}{2}}^{1}$$

$$=\qquad+\frac{2\pi}{3}-\frac{2}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}=\underline{\underline{\frac{\pi}{3}\left(2-\sqrt2\right)}}$$

2 pokus sférické:

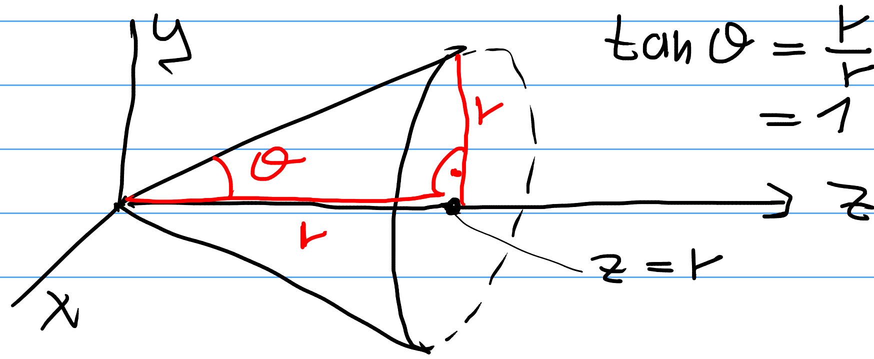
kužel



má omezení na úhel θ z rovnice

$z^2=x^2+y^2 \rightsquigarrow \theta=\frac{\pi}{4}$

nebo se podíváme



$\tan\theta=\frac{r}{r}=1$

$0 \leq r \leq 1$ protože horní hranice je koule

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$ pohled na osu xy je vždy kruh

$$\Rightarrow V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{1} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= 2\pi \frac{1}{3} \int_0^{\pi/4} \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(0) \right]$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{3} \left(-\sqrt{2} + 2 \right)}}$$ ✓

Příští týden: Písemka

- extrémy (stac. body)
- změna souřadnic (v dif rovnic)