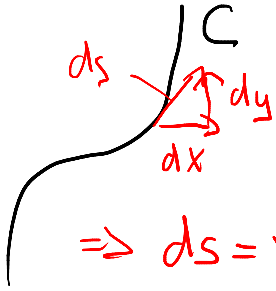
Cvičení 9

Křivkové integrály

1 druhu: $\int_C F(x,y)\,ds$;



$$\Rightarrow ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$$

parametrizace 1)
$$x=\varphi(t)$$
$$y=\psi(t) \qquad t\in(\alpha,\beta)$$
$$ds=\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt$$

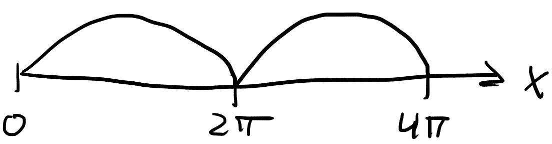
$$\int_C F(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta F(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}\,dt$$

2) $y=y(x)$, $x\in[a,b]$

$$ds=\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$$

$$\int_C F(x,y)\,ds = \int_a^b F(x,y(x))\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$$

Př: cykloida



parametrizace :
$$x=r(t-\sin t)$$
$$y=r(1-\cos t)$$

délka oblouku: $\int_C 1\,ds$ pro $t\in[0,2\pi]$

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}_{dt}=\sqrt{r^2(1-\cos t)^2+r^2\sin^2 t}\,dt=2r\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,dt$$
$$=2r\left|\sin\tfrac{t}{2}\,dt\right|$$

$$L = \int_0^{2\pi} 2r \Big|\underbrace{\sin \tfrac{t}{2}}_{\substack{\text{kladné} \\ \text{pro } t\in(0,2\pi)}} dt\Big| = 2r \int_0^{2\pi} \sin \tfrac{t}{2}\, dt$$

$$= -4r \Big[\cos \tfrac{t}{2}\Big]_0^{2\pi} = \underline{\underline{8r}}$$

hmotnost pro hustotu $\rho(x,y) = y^2$

musíme dosadit za $y = r(1-\cos t)$

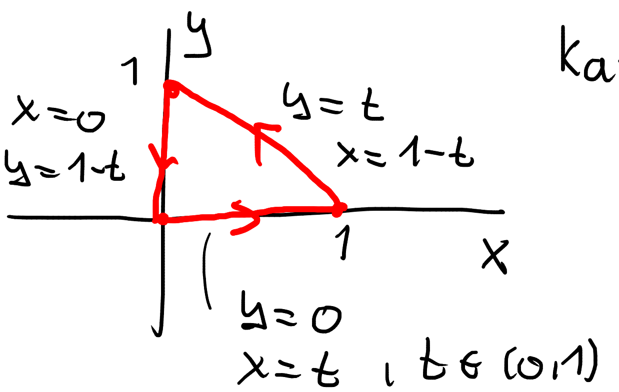
$$\Rightarrow \quad M = \int_0^{2\pi} r^2 \underbrace{(1-\cos t)^2}_{(2\sin^2 \frac{t}{2})^2} \cdot 2r \sin \tfrac{t}{2}\, dt$$

$$= 8r^3 \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^5 \tfrac{t}{2}}_{\sin\frac{t}{2}(1-\cos^2\frac{t}{2})^2} dt = \left| \begin{array}{l} u = \cos \frac{t}{2} \\ du = -\frac{1}{2}\sin \frac{t}{2} \end{array} \right|$$

$$= -16r^3 \int^{-1} (1-u^2)^2 du = 16r^3 \Big[\frac{u^5}{5} - 2\frac{u^3}{3} + u\Big]_{-1}^{1} =$$

$$= 16r^3 \cdot \frac{16}{15} = \underline{\frac{256}{15} r^3}$$

př skládáme křivku z více křivek:



každou parametrizujeme zvlášť

• Integrujme $\displaystyle\int_{\Delta} (x+y)\,ds = \int_{\rightarrow} (x+y)\,ds + \int_{\nwarrow} (x+y)\,ds + \ldots$

$$+\int_{\gamma}(x+y)\,ds=\int_0^1 t\,|dt|+\int_0^1\sqrt{2}\,|dt|+\int_0^1 t\,|dt|=\underline{1+\sqrt{2}}$$

př: můžeme počítat i ve 3D

šroubovice: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$, $t\in[0,2\pi]$ ⇑ 1 závit

$$\cdot\ L=\int_C ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}\,dt=\underline{2\pi\sqrt{2}}$$

$\cdot$ hmotnost s $\rho(x,y,z)=z$

$$M=\int z\,ds=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}t\,dt=\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}(2\pi)^2}$$

Křivkové integrály 2. druhu

= integrály z vektorových polí

$$\int_C \vec{F}(x,y)\,d\vec{r}=\int_C P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$$

kde $\vec{F}(x,y)=(\underbrace{P(x,y),\ Q(x,y)}_{\text{složky v. pole}})$

př: $C=$ kružnice
$F=(x,y)$ ⇝ parametrizace
$x=r\cos t$
$y=r\sin t$

$$d\vec{r} = (dx, dy) = (-r\sin t, r\cos t)$$

$$\Rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{r} = x\,dx + y\,dy = r\cos t\cdot(-r\sin t)\,dt$$
$$+ r\sin t\, r\cos t\, dt = 0$$

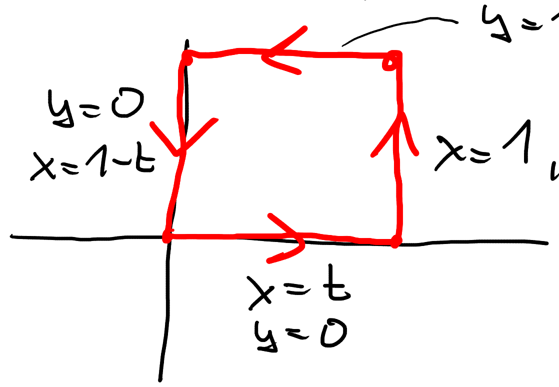
$$\Rightarrow \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} 0\,dt = 0$$

(pole je kolmé na křivku)

2) zvolme jiné pole např. $F = (-y, x)$

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C -y\,dx + x\,dy = \int_0^{2\pi} r^2\,dt = 2\pi r^2$$

zkusme stejná pole, ale jinou křivku:



a pro všechny 4 je $t \in [0, 2\pi)$

1) pro pole $F = (x, y)$

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int x\,dx + y\,dy$$

a sečteme pro každý segment zvlášť

$$= \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 1-t\,(-dt)$$
$$+ \int_0^1 1-t\,(-dt)$$

u z druhu není absolutní hodnota

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(-1 + \frac{1}{2}\right) + \left(-1 + \frac{1}{2}\right) = 0 \to$$

stejně jako pro kružnici !

pro pole $F = (x, y)$ by vyšlo 0 pro všechny uzavřené křivky

2) pro pole $F = (-y, x)$, $\oint_{\square} -y\,dx + x\,dy =$

$$\int_0^1 0\,dt + \int_0^1 1\,dt + \int_0^1 -1\,dt + \int_0^1 0\,dt$$

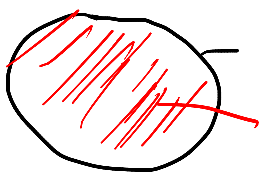
$= 0$ (vyšlo jinak než pro kružnici)

$\Rightarrow$

Greenova věta

pro křivkové integrály 2. druhu

- předpoklady: P, Q, Q_x, P_y jsou spojité
- tvrzení: $$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_A \operatorname{rot} \vec{F} \, dA$$



C = libovolná uzavřená křivka

A = množina ohraničená křivkou

ve složkách $\vec{F} = (P, Q)$

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

- co se stane když $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$?

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

toto nastane $\Leftrightarrow$ existuje potenciál $V(x,y)$ takový že $\vec{F} = \operatorname{grad} V$ tedy

$$\vec{F} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

pak $\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \int_C \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy =$

$\int_C dV = V(\text{konec křivky}) - V(\text{začátek})$

toto platí i pro neuzavřené křivky

Využití:

šroubovice
$$x = \cos t$$
$$y = \sin t$$
$$z = t \qquad t \in [0, 2\pi]$$

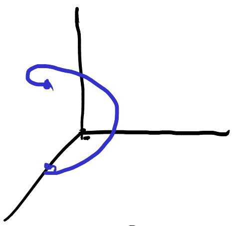
pro $F = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

křivka sice není uzavřená ale pole je potenciálové s $V = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \vec{F} \cdot d\vec{r} = V\big(\underbrace{(1,0,2\pi)}_{\text{konc. bod}}\big) - V\big(\underbrace{(1,0,0)}_{\text{poč. bod}}\big)$$

$$= \sqrt{1+4\pi^2} - 1$$

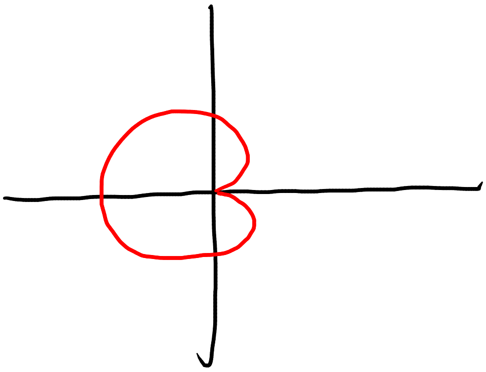
DÚ
- ověřte normální integraci
- zkuste zda integrace závisí na integrační cestě? Spojte body jinou křivkou a uvidíte jak vám vyjde int.



(obojí jsme dělali na cvičení)

Př využití Greenovy věty

Křivka: kardioida (srdcovka)



parametrizace:

$$x = \frac{3}{2}\cos t - \cos^2 t$$
$$y = \frac{3}{2}\sin t - \cos t \sin t$$

nebo v polárních souř.

$$r(\varphi) = \frac{3}{2}(1 - \cos\varphi)$$

vezmeme pole $\vec{F} = (-y, x)$

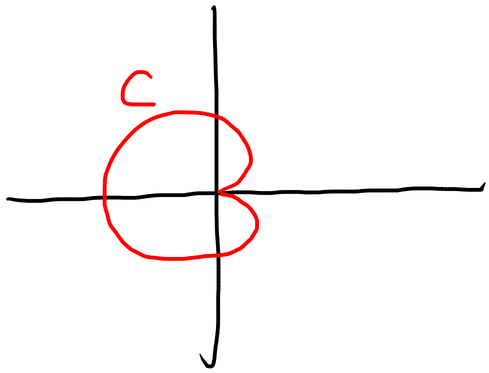
1) bez Greenovy věty

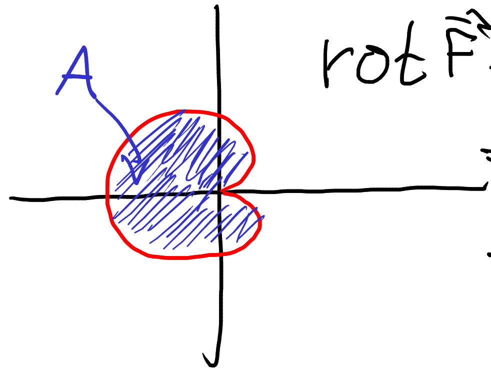
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C -y\,dx + x\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{3}{2}\sin t + \cos t \sin t\right)\left(-\frac{3}{2}\sin t + 2\sin t \cos t\right) + \left(\frac{3}{2}\cos t - \cos^2 t\right)\left(\frac{3}{2}\cos t - \cos 2t\right) dt = \text{moc těžké}$$

2) Použijeme Greenovu větu:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_A \operatorname{rot}\vec{F}\, dA$$





$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 1-(-1) = 2$$

$$\Rightarrow \oint_C -y\,dx + x\,dy = \underbrace{\iint_A 2\,dx\,dy}_{\text{daleko jednodušší}}$$

daleko jednodušší

$= 2\cdot$ obsah plochy

Použijeme polární souřadnice

$$0 \leq r \leq \frac{3}{2}(1-\cos\varphi)$$
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$2\cdot S = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{3}{2}(1-\cos\varphi)} r\,dr\,d\varphi = \frac{9}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2 d\varphi$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{2\pi} 1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{9}{2}\left[\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \underline{\underline{\frac{27}{2}\pi}}$$

10 cvičení

Předpoklad spojitosti v Greenovy věty je důležitý

Př: potenciálové v. pole z $V(x,y) = \frac{1}{xy}$

$\Rightarrow \vec{F} = \left(-\frac{1}{yx^2}, -\frac{1}{y^2x}\right)$ není spojité na osách $x=0$ a $y=0$

rotace $\vec{F}$ je nula všude kromě os $(x=0)$ a $(y=0)$ kde je nedefinovaná!

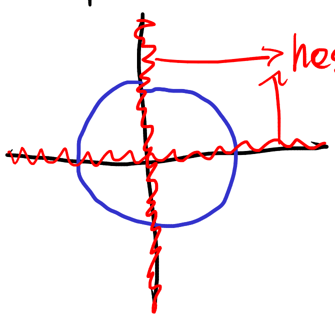
zvolme C = kružnice okolo počátku

$$\oint \vec{F}\,d\vec{r} = \oint_0^{2\pi} \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi} - \frac{1}{\sin^2\varphi}\right) =$$

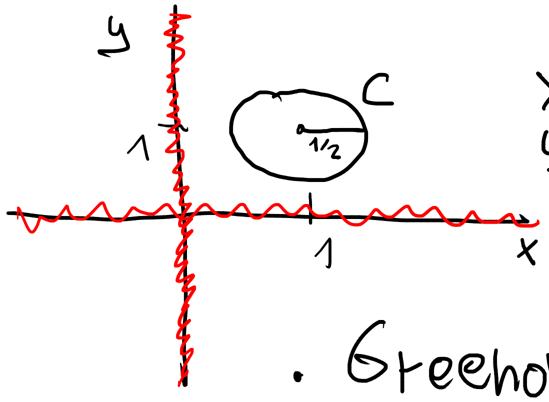
$$= \frac{1}{r^2}\Big[\tan\varphi + \cot\varphi\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{r^2}\Big[0 - 0 + \underbrace{\infty - \infty}_{\text{neurčitý výraz}}\Big] = \text{diverguje}$$

$\rightarrow$ nespojitost pole pokazí integrál.



ale pokud se křivka nespojitostem vyhne tak lze Greenovu větu použít



$$x = 1 + \tfrac{1}{2}\cos t$$
$$y = 1 + \tfrac{1}{2}\sin t$$

· Greenova věta

$$\oint_C -\frac{1}{yx^2}dx - \frac{1}{y^2x}dy =$$

$$\iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{y^2x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{yx^2}\right)\right] dx\,dy$$

$$= 0$$

· normálně

$$\oint_0^{2\pi} \left(\frac{\sin t}{(1+\frac{1}{2}\sin t)(1+\frac{1}{2}\cos t)^2} - \frac{\cos t}{(1+\frac{1}{2}\sin t)^2(1+\frac{1}{2}\cos t)}\right) dt$$

$$= \left[\frac{1}{(1+\frac{1}{2}\cos t)(1+\frac{1}{2}\sin t)}\right]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{souhlasí} \checkmark$$

Fyzikálnější příklad: $F = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

rot $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \text{grad}\,V$ všude kromě bodu $(0,0)$ kde je nespojitost, podobně jako u elmag. pole elektrického náboje.

křivka : $x = r\cos t$ kružnice okolo
$y = r\sin t$ počátku

1) co je potenciál? řešení rovnic

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

integrací a kontrolou
dostaneme

$$V = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

2) křivkový integrál

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{-r\sin\varphi}{r^2}\cdot(-r\sin\varphi)\,d\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{r\cos\varphi}{r^2}\, r\cos\varphi\, d\varphi\right)$$
$$= \int_0^{2\pi}(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

⇒ nespojitost dává konečný příspěvek
podobně jako elektrický náboj

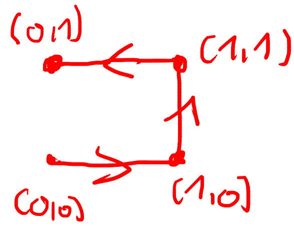
pro křivku která neobsahuje (0,0)
(singularitu) dostame vždy $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$
díky Greenově větě ($\operatorname{rot}\vec{F} = 0$)

Využití Greenovy věty k doplnění křivek na uzavřené a využití nezávislosti na int. cestě:

pole: $\vec{F_1} = (x, y)$ $\quad \operatorname{rot} \vec{F_1} = 0$

$\vec{F_2} = (-y, x)$ $\quad \operatorname{rot} \vec{F_2} = 2$

Př: spočtete int po křivce s použitím Green věty



! Greenova věta funguje pouze pro uzavřené křivky

1) pro $\vec{F_1} = (x, y)$ Greenova věta říká

$$\oint_{\square} x\,dx + y\,dy = 0$$

$\Rightarrow$ pro křivky platí $\square = \sqsupset + \downarrow$

pro integrály

$$\oint_{\square} x\,dx + y\,dy = \int_{\sqsupset} x\,dx + y\,dy + \int_{\downarrow} x\,dx + y\,dy$$

"0 díky Greenově větě

$$\Rightarrow \int xdx+ydy = -\int_{\downarrow} xdx+ydy = -\int_0^1 0-(1-t)\,dt$$

$$= 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$x=0$
$y=1-t$
$t\in(0,1)$

nebo můžeme využít toho že pole je potenciálové s $V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

a tedy
$$\int xdx+ydy = V((0,1)) - V(0,0)$$
$$=\frac{1}{2}$$

2) pro $\vec{F}_2 = (-y,x)$ s $\operatorname{rot}\vec{F}_2 = 2$

znovu stejný argument:

$$\int -ydx+xdy = \underbrace{\oint -ydx+xdy}_{\text{Green věta}} - \int_{\downarrow} -ydx+xdy$$

$$= \iint 2\,dxdy - \int_{\downarrow} -ydx+xdy$$

$$= 2\cdot 1 - 0 = \underline{\underline{2}}$$

DÚ na využití Green věty
(int. monstrum skripta)

1) transformujte integrál

$$\oint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\left(xy + \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy$$

na dvojný integrál přes plochu A ohraničenou křivkou C pomocí Greenovy věty, kde C je libovolná uzavřená křivka.

2) spočtěte $\oint_C (x+y)^2\,dx - (x^2+y^2)\,dy$

Kde C je trojúhelník s vrcholy $(1,1)$, $(3,2)$ a $(2,5)$
použijte Greenovu větu

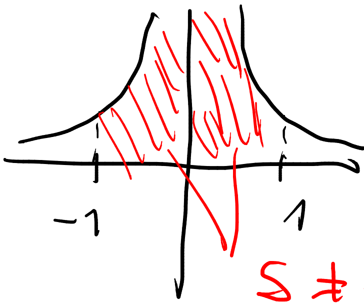
11 cvičení

připomenutí: integrály z nespojitých fcí

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = \left(-1 + \frac{1}{(-1)}\right) = -2$$

tohle je špatně!

graf:



$S \neq -2$!

musíme při integraci izolovat bod nespojitosti $(0,0)$

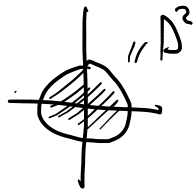
$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}dx =$$

(fce je sudá)

$$= 2\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}dx = 2\left[-\frac{1}{x}\right]_{0}^{1} = \underline{\underline{\infty}}$$

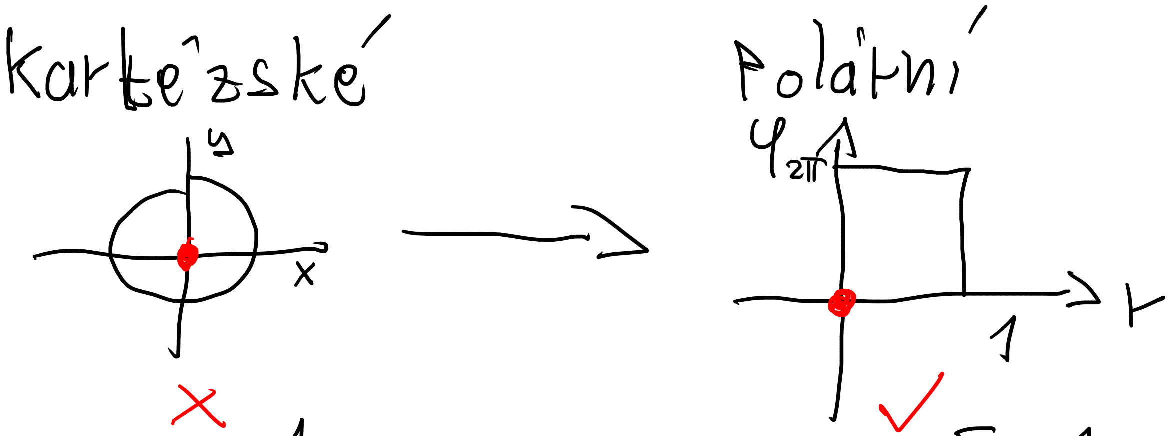
zkusíme to stejné ve více dimenzích.

2D: $\iint_{\Delta^2} \frac{1}{x^2+y^2}dxdy$ přes kruh



$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{r^2}\, r\,dr\,d\varphi = 2\pi\Big[\ln r\Big]_0^1 = \infty$$

singularita je na kraji definičního oboru (v $r=0$)



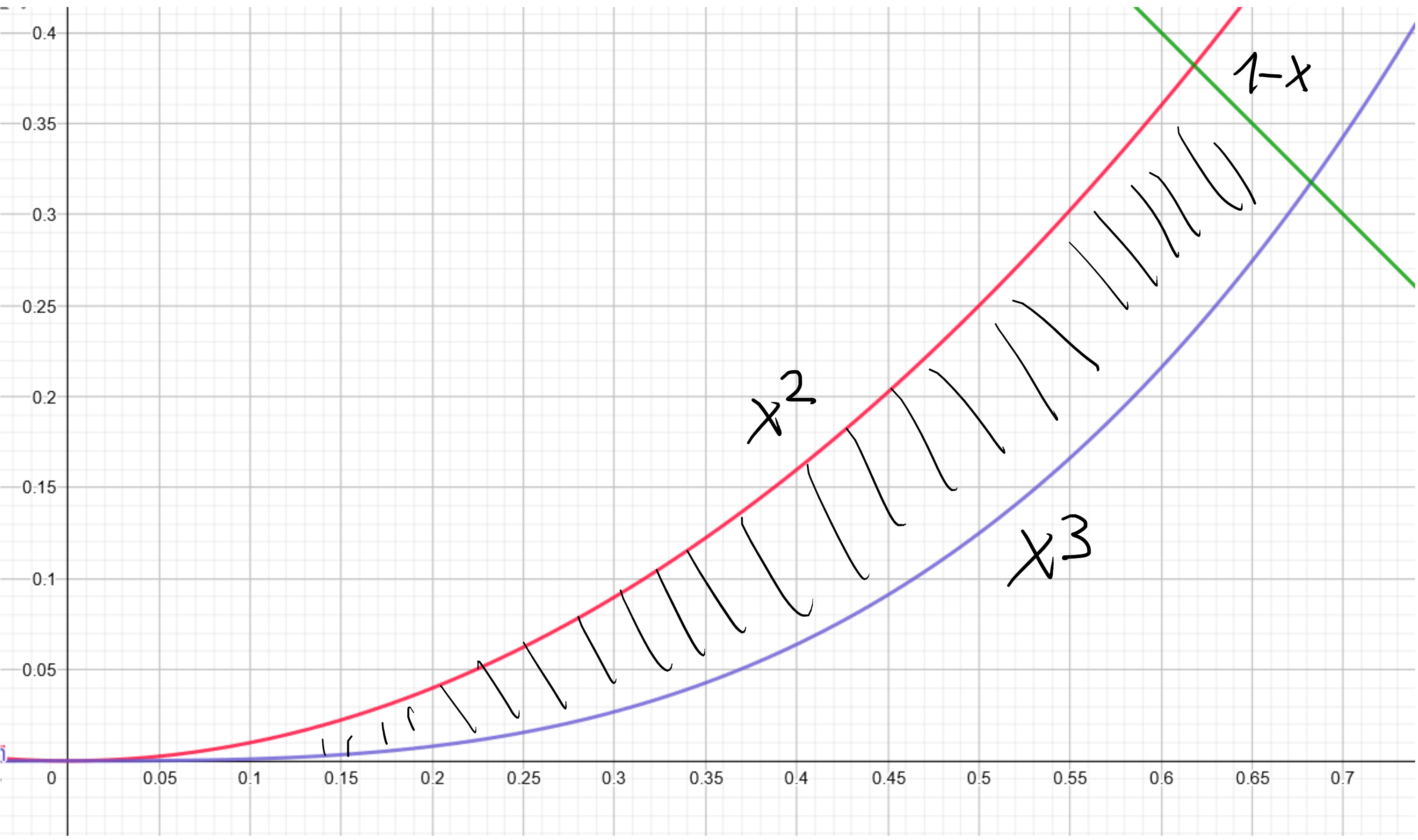
3D $$\iiint_{D^3} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 \frac{1}{r^2}\cdot r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \underline{\underline{4\pi}}$$

plná koule

DÚ zkuste to samé přes čtverec a krychli

Př: rozdělení def. oborů při záměně pořadí integrace

oblast ohraničená fcemi $x^2, x^3, 1-x$



1) popsat oblast nerovnicemi typu

$$x_0 \leq x \leq x_1$$
$$f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$$

! potřebujeme dvě

spočteme průsečíky $1-x = x^2 \iff x \approx 0{,}6$

$1-x = x^3 \iff x \approx 0{,}7$

$\Rightarrow$

$$0 \le x \le 0{,}6 \qquad \text{a} \qquad 0{,}6 \le x \le 0{,}7$$
$$x^3 \le y \le x^2 \qquad\qquad x^3 \le y \le 1-x$$

2) napište vzorec pro obsah a zaměňte pořadí integrace

$$S = \int_0^{0{,}6} \int_{x^3}^{x^2} dy\,dx + \int_{0{,}6}^{0{,}7} \int_{x^3}^{1-x} dy\,dx$$

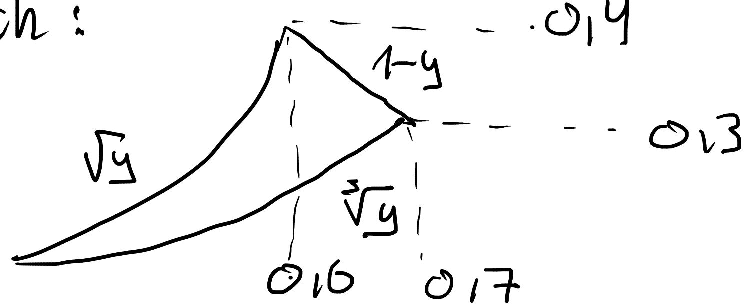
prohození proměnných:

inverzní fce

$y = x^2 \to x = \sqrt{y}$

$y = x^3 \to x = \sqrt[3]{y}$

$y = 1-x \to x = 1-y$



$$S = \int_0^{0{,}3} \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} dx\,dy + \int_{0{,}3}^{0{,}4} \int_{\sqrt{y}}^{1-y} dx\,dy$$

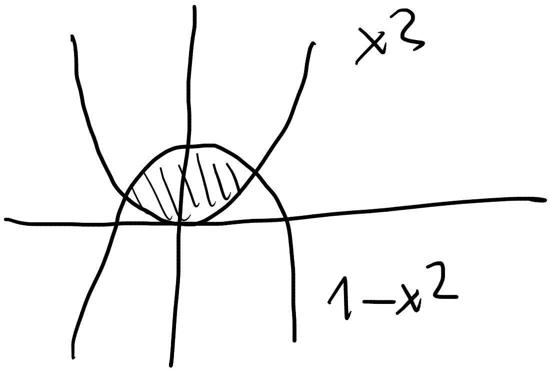
DÚ zkontrolujte, že obojí vyjde stejně ($\approx 0{,}05$)

Př: oblast mezi $1-x^2$ a x^2

Průsečíky:

$1-x^2 = x^2$

$\Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$



$$S = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{x^2}^{1-x^2} dy\,dx$$

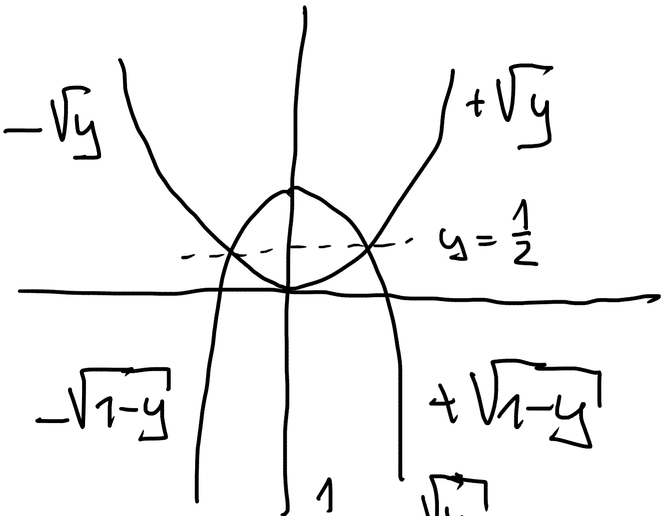
záměna pořadí:

$y = 1-x^2$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{1-y}$

které zvolit?

$\rightarrow$ záleží na obrázku!



$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{x}$

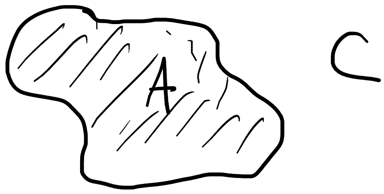
$$\Rightarrow S = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} dx\,dy$$

DÚ ověřte, že se integrály pro S rovnají ($\frac{2}{3}\sqrt{2}$)

Pr: můžeme měřit obsahy množin pomocí křivkového integrálu a Greenovy věty: stačí zvolit $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$

takové že $\operatorname{rot} \vec{F} = 1$ pak dle Greenovy věty platí

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_A 1\,dx\,dy$$



$= \text{obsah } A$

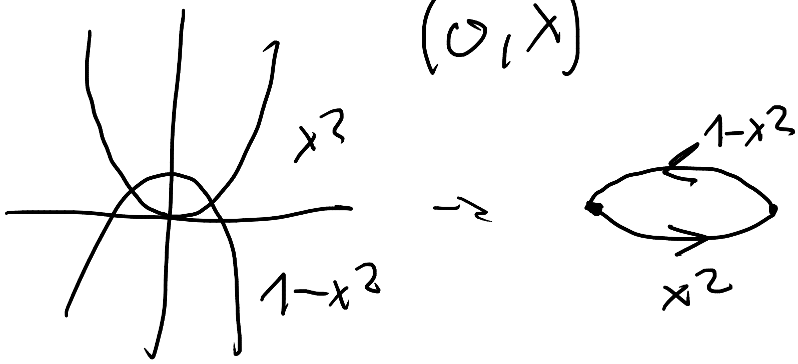
Př: volby $\vec{F} \sim$ $\boxed{\left(-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x\right)}$ toto použijeme

$(y, 2x)$

$(-y, 0)$

$(0, x)$

Př: pro



$$S = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -\frac{1}{2}y\,dx + \frac{1}{2}x\,dy$$

křivka 1: $y = x^2 \quad x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

křivka 2: $y = 1 - x^2 \quad x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -\frac{1}{2}x^2\,dx + \frac{1}{2}x(2x\,dx)$$

$$+ \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} -\frac{1}{2}(1-x^2)\,dx + \frac{1}{2}x(-2x\,dx) =$$

$$= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 + \frac{1}{2}\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \checkmark$$

Př: množiny ve 3D

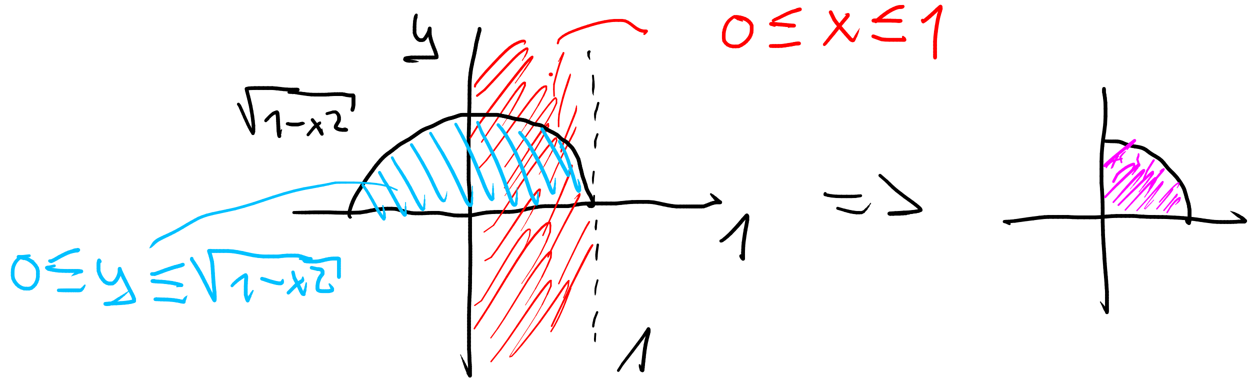
zintegrujte $\iiint_V z(x^2+y^2)\, dx\,dy\,dz$

kde V je dáno

$$0 \le x \le 1$$
$$0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$$
$$0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$$

1) o jakou množinu se jedná?

zakreslíme si první dvě podmínky v projekci do roviny xy (tedy $z=0$)

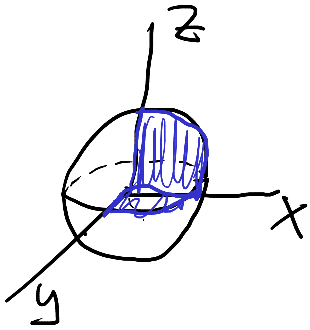


třetí nerovnost je pro z:

hraniční případ $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{(sféra)}$$

$\Rightarrow$ celkově $\frac{1}{8}$ koule :



jak spočítat integrál? $\rightarrow$ změna souř.

1) sférické : množina V je jednoduchá ale $f(x,y,z)$ není

2) válcové : množina V je těžší ale fce $f(x,y,z)$ jednodušší

sférické

$$x = r\cos\varphi\sin\theta$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = r\cos\theta$$

$$V \Rightarrow \quad r \in [0,1],\ \varphi \in [0,\tfrac{\pi}{2}],\ \theta \in [0,\tfrac{\pi}{2}]$$

$$\iiint_V z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r\cos\theta\, r^2\sin^2\theta \cdot r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^1 r^5\, dr = \ldots =$$

$$= \frac{\pi}{48}$$

2) válcové

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$

množina V : $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ $\Big\}$ $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $0 \leq r \leq 1$

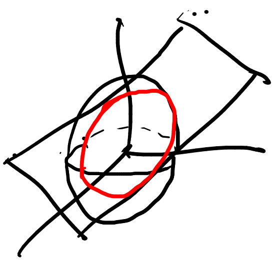
$0 \leq z \leq \sqrt{1-r^2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-r^2}} z r^3 \, dz \, dr \, d\varphi = \frac{\pi}{4} \int_0^1 (1-r^2) r^3 = \frac{\pi}{48}$$

Př: průnik sféry a roviny:

Křivka : $x^2+y^2+z^2 = 1$

$x+z=0$



použijeme sférické souř. a vyřešíme rovnice

$x^2+y^2+z^2 = 1 \Rightarrow r = 1$

$x+z=0 \Rightarrow \cos\varphi \sin\theta + \cos\theta = 0$

$\cos\varphi = -\cot g\,\theta$

$\Rightarrow \sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\cot g^2\theta}$

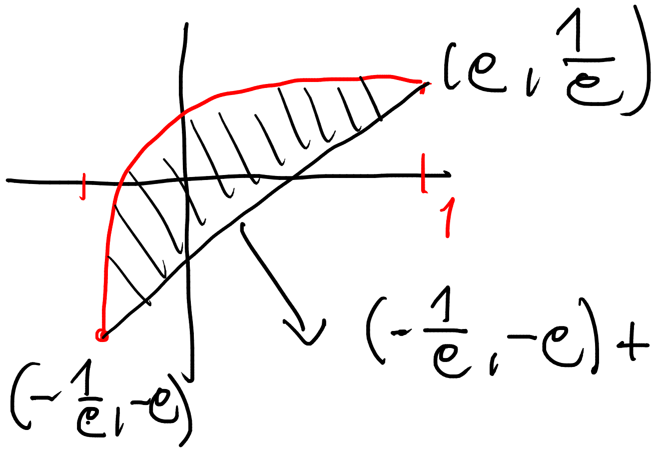
$\Rightarrow$ křivka je $x = \cos\varphi \sin\theta = -\cos\theta$

$y = \sqrt{1-\cot g^2\theta} \cdot \sin\theta$

$z = \cos\theta$

Př spočtete obsah útvaru:

$$x = te^{t}$$
$$y = te^{-t} \quad t \in (-1,1)$$



použijeme křivkový integrál
$\vec{F} = (-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x)$

$$S = \frac{1}{2}\oint -y\,dx + x\,dy - \frac{1}{2}\int -y\,dx + x\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} -te^{-t}(e^{t} + te^{t})\,dt + te^{t}(e^{-t} - te^{-t})\,dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{1} -\left(-e + t\left(\frac{1}{e} + e\right)\right)\left(e + \frac{1}{e}\right)dt$$
$$+ \left(-\frac{1}{e} + t\left(\frac{1}{e} + e\right)\right)\left(e + \frac{1}{e}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{e^4 - 1}{e^2} \approx 6{,}9$$