17. SAMOADJUNGOVANÉ OPERÁTORY A JEJICH VLASTNÍ ČÍSLA A VEKTORY

Jan Paseka

Ústav matematiky a statistiky
Masarykova univerzita

13. dubna 2022

Obsah

Abstrakt

V této kapitole budeme pokračovat ve studiu struktury lineárních operátorů na konečně rozměrných vektorových prostorech se skalárním součinem.

Abstrakt

V této kapitole budeme pokračovat ve studiu struktury lineárních operátorů na konečně rozměrných vektorových prostorech se skalárním součinem.

Zavedeme pojem ***adjungovaného zobrazení a samoadjungovaného lineárního operátoru*** a podíváme se na jeho diagonalizovatelnost.

Abstrakt

V této kapitole budeme pokračovat ve studiu struktury lineárních operátorů na konečně rozměrných vektorových prostorech se skalárním součinem.

Zavedeme pojem ***adjungovaného zobrazení a samoadjungovaného lineárního operátoru*** a podíváme se na jeho diagonalizovatelnost.

V celé této kapitole bude V buď reálný nebo komplexní vektorový prostor, tj. pole skalárů je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Obsah

1. Samoadjungované operátory a jejich vlastní vektory a vlastní čísla
   - Vlastní vektory
2. Rozklad matice

Samoadjungované operátory I

Motivace 1: **Vlastní vektory a vlastní čísla symetrické matice**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |A-\lambda E| &= (1-\lambda)(2-\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1 \\ &= (\lambda - \tfrac{3+\sqrt{5}}{2})(\lambda - \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}) = 0 \end{aligned}$$

Samoadjungované operátory I

Motivace 1: **Vlastní vektory a vlastní čísla symetrické matice**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |A-\lambda E| &= (1-\lambda)(2-\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1 \\ &= (\lambda - \tfrac{3+\sqrt{5}}{2})(\lambda - \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}) = 0 \end{aligned}$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ a $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.
Pro tato vlastní čísla nalezneme vlastní vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$.

$$(1 - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})x_1 - x_2 = 0, (1 - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})y_1 - y_2 = 0$$

$$\mathbf{v}_1 = (1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})^T, \mathbf{v}_2 = (1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})^T$$

Tyto vektory jsou na sebe **navzájem kolmé.**

Samoadjungované operátory II

Tedy k symetrické matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

existuje ortogonální báze tvořená vlastními vektory.

Toto není náhoda.

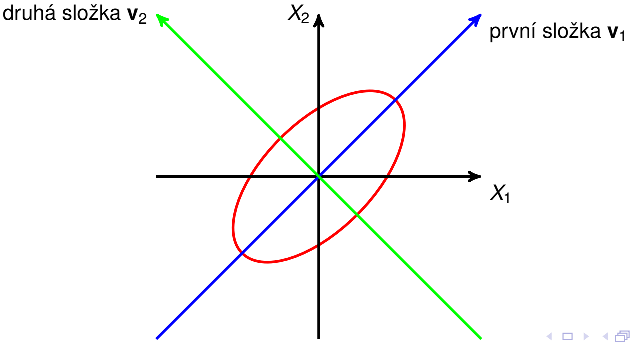
Samoadjungované operátory II

Tedy k symetrické matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

existuje ortogonální báze tvořená vlastními vektory.

Toto není náhoda.



Samoadjungované operátory III

Motivace 2: **Kolmá projekce**
Buď U vektorový prostor se skalárním součinem, V jeho konečně rozměrný vektorový podprostor a $P_V : U \to U$ kolmá projekce na podprostor V.

Samoadjungované operátory III

Motivace 2: **Kolmá projekce**
Buď U vektorový prostor se skalárním součinem, V jeho konečně rozměrný vektorový podprostor a $P_V : U \to U$ kolmá projekce na podprostor V.

Ukážeme, že platí $\boxed{\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U : \langle P_V(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, P_V(\mathbf{v}) \rangle}$

$$\langle P_V(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \underbrace{P_V(\mathbf{u})}_{\in V}, \underbrace{(\mathbf{v} - P_V(\mathbf{v}))}_{\in V^\perp} + \underbrace{P_V(\mathbf{v})}_{\in V} \rangle = \langle P_V(\mathbf{u}), P_V(\mathbf{v}) \rangle$$

Samoadjungované operátory III

Motivace 2: **Kolmá projekce**
Buď U vektorový prostor se skalárním součinem, V jeho konečně rozměrný vektorový podprostor a $P_V : U \to U$ kolmá projekce na podprostor V.

Ukážeme, že platí $\boxed{\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U : \langle P_V(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, P_V(\mathbf{v}) \rangle}$

$$\langle P_V(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \underbrace{P_V(\mathbf{u})}_{\in V}, \underbrace{(\mathbf{v} - P_V(\mathbf{v}))}_{\in V^\perp} + \underbrace{P_V(\mathbf{v})}_{\in V} \rangle = \langle P_V(\mathbf{u}), P_V(\mathbf{v}) \rangle$$

Pak říkáme, že P_V je ***samoadjungované zobrazení***.

Samoadjungované operátory IV

Definice 1

Nechť $\varphi \colon U \to V$ je lineární zobrazení unitárních (euklidovských) prostorů. ***Adjungovaným zobrazením*** k φ se nazývá lineární zobrazení $\varphi^* : V \to U$ takové, že pro všechny vektory $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{v} \in V$ platí

$$\boxed{\langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_V = \langle \mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v}) \rangle_U.}$$

Samoadjungované operátory V

Příklad 1.1

Buď $\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ lineární zobrazení, $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$. Hledáme adjungované zobrazení $\varphi^* : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$ ve tvaru $\varphi^*(\mathbf{y}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{y}$.

Samoadjungované operátory V

Příklad 1.1

Buď $\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ lineární zobrazení, $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$. Hledáme adjungované zobrazení $\varphi^* : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$ ve tvaru $\varphi^*(\mathbf{y}) = \mathbf{B}\cdot\mathbf{y}$.

Musí platit

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle_{\mathbb{C}^k} &= \langle \mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})\rangle_{\mathbb{C}^n} \\
\langle \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{\mathbb{C}^k} &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{B}\cdot\mathbf{y}\rangle_{\mathbb{C}^n} \\
(\mathbf{A}\cdot\mathbf{x})^T\cdot\overline{\mathbf{y}} &= \mathbf{x}^T\cdot\overline{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{y})} \\
\mathbf{x}^T\cdot\mathbf{A}^T\cdot\overline{\mathbf{y}} &= \mathbf{x}^T\cdot\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{y}}
\end{aligned}$$

Odtud $\boxed{B = \overline{\mathbf{A}}^T}$ je matice adjungovaného zobrazení φ^* k φ.

Samoadjungované operátory VI - Souřadnicové zobrazení

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je ortonormální báze v unitárním (euklidovském) prostoru V dimenze n. Pak souřadnicové zobrazení $(-)_\alpha \colon V \to \mathbb{C}^n$ ($(-)_\alpha \colon V \to \mathbb{R}^n$) je unitární (ortogonální) zobrazení, tj.,

$$\boxed{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{C}^n} \quad (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{R}^n}).}$$

Samoadjungované operátory VI - Souřadnicové zobrazení

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je ortonormální báze v unitárním (euklidovském) prostoru V dimenze n. Pak souřadnicové zobrazení $(-)_\alpha \colon V \to \mathbb{C}^n$ ($(-)_\alpha \colon V \to \mathbb{R}^n$) je unitární (ortogonální) zobrazení, tj.,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{C}^n} \quad (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{R}^n}).$$

Totiž, pro $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i$ a $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n d_j \mathbf{u}_j$ máme

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V &= \langle \textstyle\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^n d_j \mathbf{u}_j \rangle_V = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle_V \overline{d_j} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n c_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle_V \overline{d_i} = \sum_{i=1}^n c_i \overline{d_i} \\ &= (\mathbf{u})_\alpha^T \cdot \overline{(\mathbf{v})_\alpha} = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{C}^n}. \end{aligned}$$

Samoadjungované operátory VI - Souřadnicové zobrazení

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je ortonormální báze v unitárním (euklidovském) prostoru V dimenze n. Pak souřadnicové zobrazení $(-)_\alpha\colon V \to \mathbb{C}^n$ ($(-)_\alpha\colon V \to \mathbb{R}^n$) je unitární (ortogonální) zobrazení, tj.,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{C}^n} \quad (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{R}^n}).$$

Totiž, pro $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i$ a $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n d_j \mathbf{u}_j$ máme

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V &= \langle \textstyle\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^n d_j \mathbf{u}_j \rangle_V = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle_V \overline{d_j} \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n c_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle_V \overline{d_i} = \sum_{i=1}^n c_i \overline{d_i} \\
&= (\mathbf{u})_\alpha^T \cdot \overline{(\mathbf{v})_\alpha} = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{C}^n}.
\end{aligned}$$

Tedy i inverzní zobrazení $(-)_\alpha^{-1}\colon \mathbb{C}^n \to V$ ($(-)_\alpha\colon \mathbb{R}^n \to V$) je unitární (ortogonální) zobrazení.

Samoadjungované operátory VII

Věta 1.2

Nechť α *je ortonormální báze v* V*,* β *je ortonormální báze v* U*,* $\varphi : U \to V$ *je lineární zobrazení unitárních (euklidovských) prostorů,* $A = (\varphi)_{\alpha,\beta}$*. Potom k* φ *existuje právě jedno adjungované zobrazení* φ^* *a matice adjungovaného zobrazení* $\varphi^* : V \to U$ *má tvar*

$$(\varphi^*)_{\beta,\alpha} = \begin{cases} \overline{A}^T & \text{v unitárním případě,} \\ A^T & \text{v euklidovském případě.} \end{cases}$$

Obráceně, je-li $\psi : V \to U$ *lineární zobrazení a* $(\psi)_{\beta,\alpha} = \overline{A}^T$*, pak* $\psi = \varphi^*$*.*

Samoadjungované operátory VIII

Definice 2

Lineární operátor $\varphi : U \to U$ na unitárním (euklidovském) prostoru U se nazývá ***samoadjungované zobrazení***, jestliže pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ platí

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_U = \langle \mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v}) \rangle_U$$

tj. pokud $\varphi^* = \varphi$.

Věta 1.3

Operátor $\varphi : U \to U$ na unitárním (euklidovském) prostoru U je samoadjungovaný právě tehdy, když pro jeho matici v ortonormální bázi α platí

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \mathbf{A} = \begin{cases} \overline{\mathbf{A}}^T & \textit{v unitárním případě,} \\ \mathbf{A}^T & \textit{v euklidovském případě.} \end{cases}$$

Samoadjungované operátory IX

Maticím $\mathbf{A}$, které splňují podmínku $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^T$ se nazývají ***hermitovské***. Dále budeme značit $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$.

Samoadjungované operátory IX

Maticím $\mathbf{A}$, které splňují podmínku $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^T$ se nazývají ***hermitovské***. Dále budeme značit $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$.

Příkladem hermitovské matice je matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 3 & -5\mathrm{i} \\ 2-3\mathrm{i} & 5\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

Samoadjungované operátory IX

Maticím $\mathbf{A}$, které splňují podmínku $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^T$ se nazývají ***hermitovské***. Dále budeme značit $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$.

Příkladem hermitovské matice je matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 3 & -5\mathrm{i} \\ 2-3\mathrm{i} & 5\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

Podobně samoadjungované operátory na euklidovských prostorech (speciálně na $\mathbb{R}^n$) jsou určeny symetrickými maticemi.

Samoadjungované operátory X

Příklad 1.4

Buď nyní U konečně rozměrný vektorový prostor se skalárním součinem, V jeho vektorový podprostor a $P_V \colon U \to U$ kolmá projekce na podprostor V. Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je ortonormální báze U a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je báze V. Pak matice kolmé projekce je

$$P_V = \left(\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}}_{k}} & & & &
\end{array}\right).$$

Samoadjungované operátory XI

Lemma 1.5

Nechť lineární operátor $\varphi : U \to U$ *na unitárním (euklidovském) prostoru* U *je samoadjungovaný s invariantním podprostorem* V*. Pak* $V^{\perp}$ *je rovněž invariantní.*

Samoadjungované operátory XI

Lemma 1.5

Nechť lineární operátor $\varphi : U \to U$ na unitárním (euklidovském) prostoru U je samoadjungovaný s invariantním podprostorem V. Pak $V^\perp$ je rovněž invariantní.

Věta 1.6

Nechť $\varphi : U \to U$ je samoadjungovaný operátor na unitárním (euklidovském) prostoru U. Pak platí:

1. *Vlastní čísla zobrazení φ jsou reálná.*
2. *Vlastní vektory příslušné k různým vlastním číslům jsou navzájem kolmé.*

Samoadjungované operátory XII

Věta 1.7

O spektrálním rozkladu. *Pro každý samoadjungovaný operátor* $\varphi : U \to U$ *na unitárním (euklidovském) prostoru* U *existuje ortonormální báze* α *prostoru* U *tvořená vlastními vektory, v níž má* φ *diagonální matici s reálnými vlastními čísly na diagonále.*

Samoadjungované operátory XII

Věta 1.7

O spektrálním rozkladu. *Pro každý samoadjungovaný operátor* $\varphi : U \to U$ *na unitárním (euklidovském) prostoru* U *existuje ortonormální báze* α *prostoru* U *tvořená vlastními vektory, v níž má* φ *diagonální matici s reálnými vlastními čísly na diagonále.*

Důsledek 1.8

Buď $\varphi : U \to U$ *lineární operátor na unitárním (euklidovském) prostoru* U*. Pak* φ *je samoadjungovaný operátor právě tehdy, když*

$$\boxed{\varphi = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k,}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *jsou všechna navzájem různá vlastní čísla operátoru* φ *a* $P_1, \dots, P_k$ *jsou kolmé projekce do navzájem kolmých vlastních podprostorů* $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i \mathrm{id}_U)$, $i = 1, \dots, k$.

Samoadjungované operátory XIII

Důsledek 1.9

Pro každou reálnou symetrickou matici **A** *existuje ortogonální matice* **P** *tak, že matice*

$$\boxed{\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}}$$

je diagonální.

Samoadjungované operátory XIII

Důsledek 1.9

Pro každou reálnou symetrickou matici **A** *existuje ortogonální matice* **P** *tak, že matice*

$$\boxed{\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}}$$

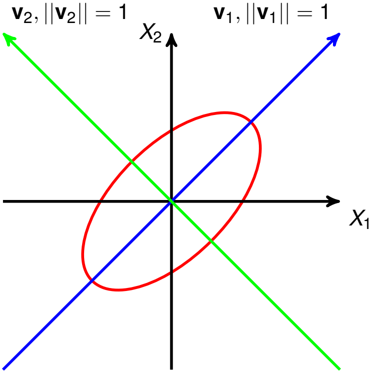
je diagonální.

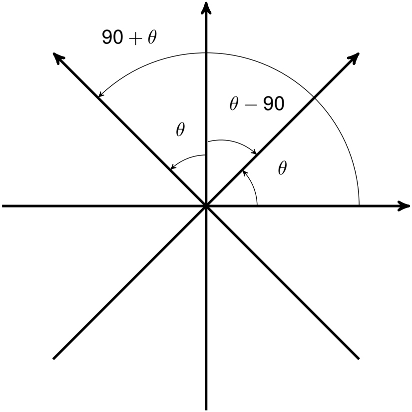
Důsledek 1.10

Každá kvadratická forma na euklidovském prostoru U dimenze n má ve vhodné ortonormální bázi analytický tvar

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 .$$

Samoadjungované operátory XIV





Obsah

1. Samoadjungované operátory a jejich vlastní vektory a vlastní čísla
2. Rozklad matice
   - Singulární rozklad
   - Pseudoinverzní matice

Singulární rozklad matice I

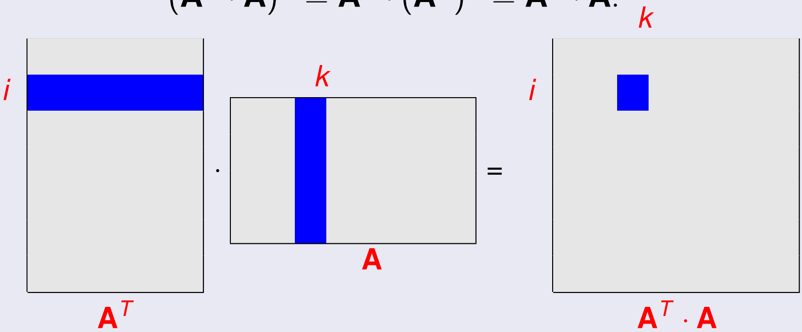
Příklad 2.1

Je-li **A** reálná matice typu $m \times n$, pak matice

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$$

je reálná symetrická matice typu $n \times n$.
Snadno pak ověříme následující rovnost

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}.$$



Singulární rozklad matice II

Příklad 2.2

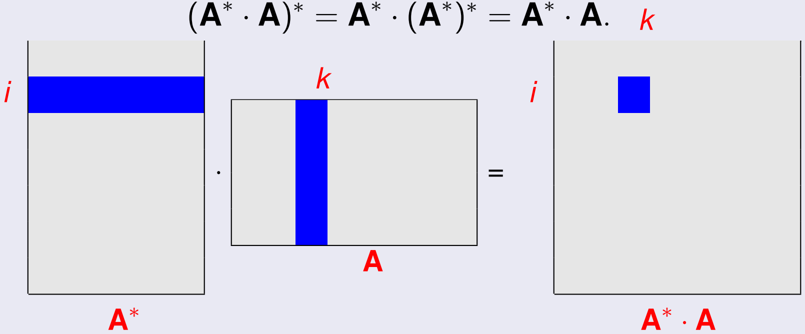
Je-li **A** komplexní matice typu $m \times n$, pak matice

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}$$

je komplexní hermitovská matice typu $n \times n$.

Snadno pak ověříme následující rovnost

$$(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^* = \mathbf{A}^* \cdot (\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}.$$



Singulární rozklad matice III

Lemma 2.3

Nechť $\varphi\colon U \to V$ *je lineární zobrazení mezi prostory se skalárním součinem. Pak* $\varphi^* \circ \varphi\colon U \to U$ *(a* $\varphi \circ \varphi^*\colon V \to V$*) jsou samoadjungované, pozitivně semidefinitní, tj.*

$$\boxed{\forall \mathbf{u} \in U : \langle (\varphi^* \circ \varphi)(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle \geq 0.}$$

Speciálně, všechna vlastní čísla jsou nezáporná a platí

$$\boxed{Ker(\varphi^* \circ \varphi) = Ker(\varphi).}$$

Singulární rozklad matice IV

Věta 2.4

Nechť $\mathbf{A} \in Mat_{k \times n}$, *kde* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *nebo* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Pak existují unitární (případně ortogonální nad* $\mathbb{R}$*) matice* $\mathbf{P}$ *typu* $k \times k$ *a* $\mathbf{Q}$ *typu* $n \times n$ *takové, že*

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*,}$$

kde

$$\mathbf{S} = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{\sigma_1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}}^{n} \\ \left(\begin{array}{cccc|ccc} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \\ \underbrace{\hphantom{\sigma_1 \quad 0 \quad \dots \quad 0}}_{r} \; \underbrace{\hphantom{0 \quad \dots \quad 0}}_{n-r} \end{array}$$

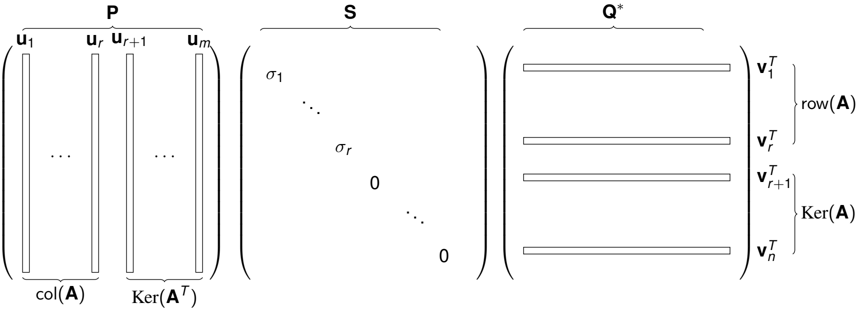
a čísla $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$ *jsou druhé odmocniny kladných vlastních čísel hermitovské matice* $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$.

Singulární rozklad matice V

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*,}$$

Singulární rozklad matice V

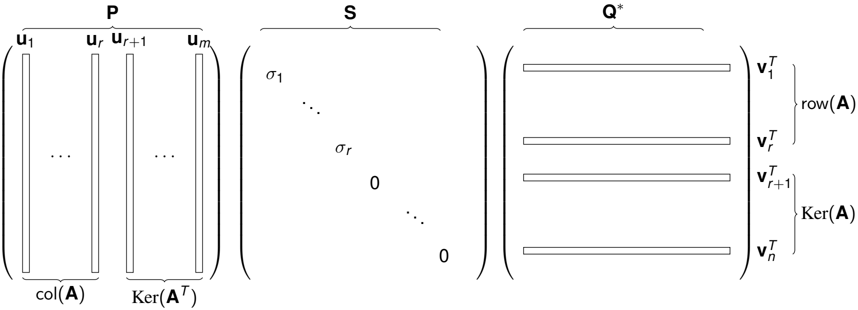
$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*,}$$



$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}, \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^T) \perp \mathrm{col}(\mathbf{A}), \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) \perp \mathrm{row}(\mathbf{A})}$$

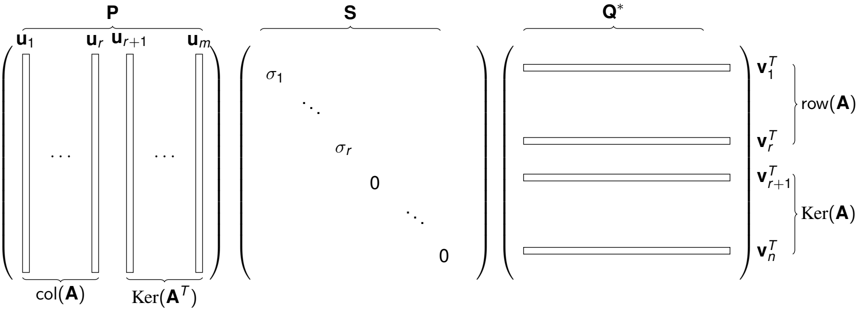
Singulární rozklad matice VI

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{S},\mathbf{P}^*\cdot\mathbf{P}=\mathbf{I}_m,\mathbf{Q}^*\cdot\mathbf{Q}=\mathbf{I}_n,}$$



Singulární rozklad matice VI

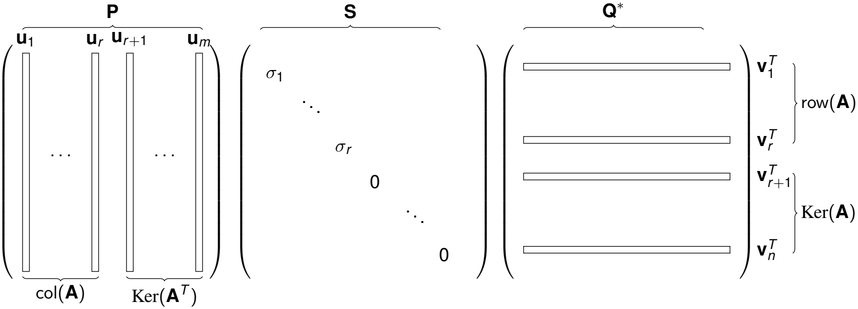
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{S},\mathbf{P}^*\cdot\mathbf{P}=\mathbf{I}_m,\mathbf{Q}^*\cdot\mathbf{Q}=\mathbf{I}_n,$$



$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_1=\sigma_1\mathbf{u}_1,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_2=\sigma_2\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_r=\sigma_r\mathbf{u}_r,\sigma_i=||\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_i||.$$

Singulární rozklad matice VI

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{S},\mathbf{P}^{*}\cdot\mathbf{P}=\mathbf{I}_{m},\mathbf{Q}^{*}\cdot\mathbf{Q}=\mathbf{I}_{n},}$$



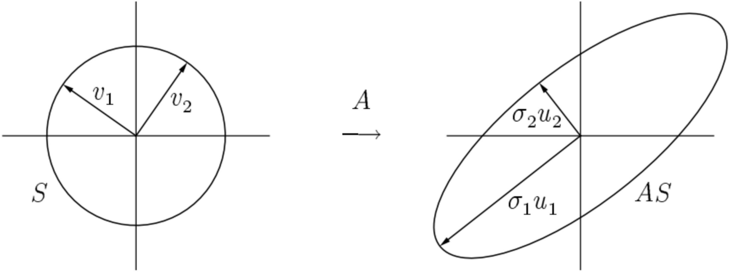
$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_1=\sigma_1\mathbf{u}_1,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_2=\sigma_2\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_r=\sigma_r\mathbf{u}_r,\sigma_i=||\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_i||.}$$

Singulární rozklad matice VII - Interpretace

Sloupce matice **P** se nazývají ***levé singulární vektory*** a sloupce matice **Q** se nazývají ***pravé singulární vektory***.

Singulární rozklad matice VII - Interpretace

Sloupce matice **P** se nazývají ***levé singulární vektory*** a sloupce matice **Q** se nazývají ***pravé singulární vektory***.



Obrázek 1: Transformace jednotkové kružnice na elipsu

Singulární rozklad matice VIII - Nástin důkazu

1. $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*,$

Singulární rozklad matice VIII - Nástin důkazu

1. $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*$,
2. každé σ_i^2 musí být vlastní číslo hermitovské matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,

Singulární rozklad matice VIII - Nástin důkazu

1. $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*$,
2. každé σ_i^2 musí být vlastní číslo hermitovské matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
3. $\mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S}$ je čtvercová diagonální matice podobná s $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,

Singulární rozklad matice VIII - Nástin důkazu

1. $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*$,
2. každé σ_i^2 musí být vlastní číslo hermitovské matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
3. $\mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S}$ je čtvercová diagonální matice podobná s $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
4. zvolíme pak tedy za $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ortonormální vlastní vektory matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$ příslušné k vlastním číslům $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$, $0, \ldots, 0$ matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,

Singulární rozklad matice VIII - Nástin důkazu

1. $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*$,
2. každé σ_i^2 musí být vlastní číslo hermitovské matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
3. $\mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S}$ je čtvercová diagonální matice podobná s $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
4. zvolíme pak tedy za $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ortonormální vlastní vektory matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$ příslušné k vlastním číslům $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$, $0, \ldots, 0$ matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
5. položíme $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_i)$, $1 \leq i \leq r$,

Singulární rozklad matice VIII - Nástin důkazu

1. $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*$,
2. každé σ_i^2 musí být vlastní číslo hermitovské matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
3. $\mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S}$ je čtvercová diagonální matice podobná s $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
4. zvolíme pak tedy za $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ortonormální vlastní vektory matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$ příslušné k vlastním číslům $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$, $0, \ldots, 0$ matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
5. položíme $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_i)$, $1 \leq i \leq r$,
6. $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ tvoří ortonormální posloupnost ležící v podprostoru $\mathrm{col}(\mathbf{A}) \perp \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^T)$,

Singulární rozklad matice VIII - Nástin důkazu

1. $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*$,
2. každé σ_i^2 musí být vlastní číslo hermitovské matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
3. $\mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S}$ je čtvercová diagonální matice podobná s $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
4. zvolíme pak tedy za $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ortonormální vlastní vektory matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$ příslušné k vlastním číslům $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$, $0, \ldots, 0$ matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
5. položíme $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_i)$, $1 \leq i \leq r$,
6. $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ tvoří ortonormální posloupnost ležící v podprostoru $\mathrm{col}(\mathbf{A}) \perp \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^T)$,
7. rozšíříme $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ o vektory $\mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_m$ tvořící ortogonální bázi $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^T)$,

Singulární rozklad matice VIII - Nástin důkazu

1. $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*$,
2. každé σ_i^2 musí být vlastní číslo hermitovské matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
3. $\mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S}$ je čtvercová diagonální matice podobná s $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
4. zvolíme pak tedy za $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ortonormální vlastní vektory matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$ příslušné k vlastním číslům $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$, $0, \ldots, 0$ matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
5. položíme $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_i)$, $1 \leq i \leq r$,
6. $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ tvoří ortonormální posloupnost ležící v podprostoru $\mathrm{col}(\mathbf{A}) \perp \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^T)$,
7. rozšíříme $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ o vektory $\mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_m$ tvořící ortogonální bázi $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^T)$,
8. ověříme $\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}$.

Pseudoinverzní matice I

<u>Motivace č. 1:</u> Buď $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ lineární zobrazení, tj. $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$. Platí

$$K^n = Ker(\varphi) \oplus Ker(\varphi)^{\perp}, K^k = Im(\varphi) \oplus Im(\varphi)^{\perp},$$

$$\varphi \restriction Ker(\varphi)^{\perp}\colon\ Ker(\varphi)^{\perp} \to Im(\varphi).$$

Pseudoinverzní matice I

Motivace č. 1: Buď $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ lineární zobrazení, tj. $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$. Platí

$$K^n = Ker(\varphi) \oplus Ker(\varphi)^{\perp}, K^k = Im(\varphi) \oplus Im(\varphi)^{\perp},$$
$$\varphi \restriction Ker(\varphi)^{\perp}\colon\ Ker(\varphi)^{\perp} \to Im(\varphi).$$

Lineární zobrazení $\varphi \restriction Ker(\varphi)^{\perp}$ je prosté (jeho jádro je triviální) a na ($Im(\varphi) = Im(\varphi \restriction Ker(\varphi)^{\perp})$ z důvodu stejné dimenze). Tedy k $\varphi \restriction Ker(\varphi)^{\perp}$ existuje inverze.

Pseudoinverzní matice I

Motivace č. 1: Buď $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ lineární zobrazení, tj. $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$. Platí

$$K^n = Ker(\varphi) \oplus Ker(\varphi)^\perp, K^k = Im(\varphi) \oplus Im(\varphi)^\perp,$$
$$\varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp\colon\ Ker(\varphi)^\perp \to Im(\varphi).$$

Lineární zobrazení $\varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp$ je prosté (jeho jádro je triviální) a na ($Im(\varphi) = Im(\varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp)$ z důvodu stejné dimenze). Tedy k $\varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp$ existuje inverze.
Má-li být **B** pseudoinverzní matice k **A**, položme $\psi(\mathbf{y}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{y}$. Pak $\psi\colon \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^n$ a určitě by kompozice

$$\psi \circ \varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp\colon\ Ker(\varphi)^\perp \to Ker(\varphi)^\perp$$

měla být identita na $Ker(\varphi)^\perp$.

Pseudoinverzní matice II

Tedy lineární zobrazení $\psi \circ \varphi \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ by mělo být kolmou projekcí na podprostor $Ker(\varphi)^{\perp}$.

Pseudoinverzní matice II

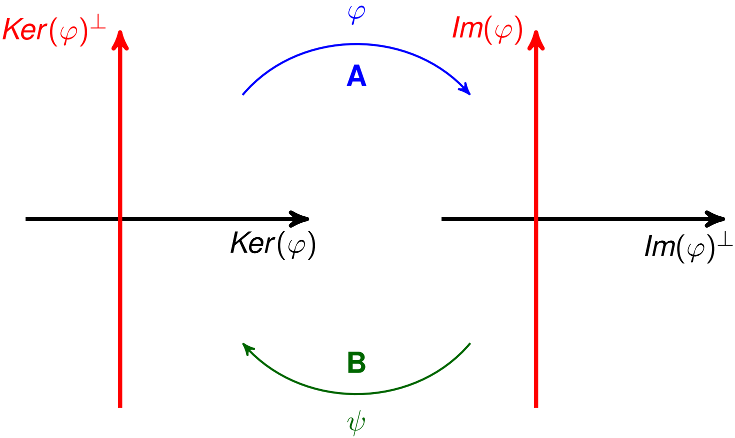
Tedy lineární zobrazení $\psi \circ \varphi \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ by mělo být kolmou projekcí na podprostor $Ker(\varphi)^\perp$.

Podobně by lineární zobrazení $\varphi \circ \psi \colon \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^k$ mělo být identita na podprostoru $Im(\varphi)$, tj. kompozice

$$\boxed{\varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp \circ \psi \colon \; Im(\varphi) \to Im(\varphi)}$$

by měla být identita na $Im(\varphi)$.
Tedy lineární zobrazení $\varphi \circ \psi \colon \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^k$ by mělo být kolmou projekcí na podprostor $Im(\varphi)$.

Pseudoinverzní matice III



Pseudoinverzní matice IV

Motivace č. 2: Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$, která je invertibilní. Pro její singulární rozklad platí

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*,}$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \overbrace{\begin{pmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{pmatrix}}^{n}, s_i > 0}$$

Pseudoinverzní matice IV

Motivace č. 2: Nechť **A** je matice typu $n \times n$, která je invertibilní. Pro její singulární rozklad platí

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*,}$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \overbrace{s_1 & 0 & \dots & 0}^{n} \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{pmatrix}, s_i > 0}$$

Pak pro inverzní matici k **A** platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= (\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*)^{-1} = (\mathbf{Q}^*)^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}^{-1} = (\mathbf{Q}^*)^*\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}^* \\ &= \mathbf{Q} \cdot \begin{pmatrix} s_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2^{-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & s_n^{-1} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}^*. \end{aligned}$$

Pseudoinverzní matice V

Definice 3

Nechť **A** je matice typu $k \times n$ se singulárním rozkladem

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{D} & \mathbf{0}_{r,n-r} \\ \hline \mathbf{0}_{n-r,r} & \mathbf{0}_{n-r,n-r} \end{array} \right) \cdot \mathbf{Q}^*, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & s_r \end{pmatrix}, s_i > 0$$

Potom se matice

$$\mathbf{A}^{(-1)} = \mathbf{Q} \cdot \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{D}^{-1} & \mathbf{0}_{r,n-r} \\ \hline \mathbf{0}_{n-r,r} & \mathbf{0}_{n-r,n-r} \end{array} \right) \cdot \mathbf{P}^*$$

typu $n \times k$ nazývá ***pseudoinverzní matice*** k matici **A**.

Pseudoinverzní matice VI - Základní vlastnosti

1. Je-li $\mathbf{A}$ invertibilní, je $\mathbf{A}^{(-1)} = \mathbf{A}^{-1}$.
2. $\left(\mathbf{A}^{(-1)}\right)^{(-1)} = \mathbf{A}$.
3. $\mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{A}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{(-1)}$ jsou samoadjungované matice.
4. Buď $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ lineární zobrazení tvaru $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$. Dále položme $\varphi^{(-1)}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{K}^k$ a definujme tak lineární zobrazení $\varphi^{(-1)}\colon \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^n$. Pak kompozice $\varphi^{(-1)} \circ \varphi$ tvaru

   $$(\varphi^{(-1)} \circ \varphi)(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

   je **kolmá projekce** $\mathbb{K}^n$ do podprostoru $(Ker(\varphi))^{\perp}$ (viz Motivace 1) a kompozice $\varphi \circ \varphi^{(-1)}$ tvaru

   $$(\varphi \circ \varphi^{(-1)})(\mathbf{y}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{y}$$

   je **kolmá projekce** $\mathbb{K}^k$ do podprostoru $Im(\varphi)$.

Pseudoinverzní matice VII - Základní vlastnosti

5. $$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A},} \quad \boxed{\mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{(-1)} = \mathbf{A}^{(-1)}.}$$
6. **Důležitá pro počítání:**

$$\boxed{\mathbf{A}^{(-1)} = (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^{(-1)} \cdot \mathbf{A}^*.}$$

7. **Důsledek (6) a (1):** Existuje-li k matici $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$ typu $n \times n$ inverzní matice, pak

$$\boxed{\mathbf{A}^{(-1)} = (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^*.}$$

Vlastnost (7) lze často použít při počítání, když $n \leq k$.

Pseudoinverzní matice VIII

Příklad 2.5

Spočtěte $\mathbf{A}^{(-1)}$ *k matici* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Platí:*

$$\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \, det \, \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = 6.$$

$$(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(-1)} &= (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pseudoinverzní matice IX - Aplikace (opakování)

Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

a označme $S = [\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})]$ lineární podprostor v $\mathbb{R}^m$ generovaný sloupci matice $\mathbf{A}$.

Pseudoinverzní matice IX - Aplikace (opakování)

Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

a označme $S = [\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})]$ lineární podprostor v $\mathbb{R}^m$ generovaný sloupci matice $\mathbf{A}$.

Podle Frobeniova kritéria má naše soustava nějaké řešení $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když $\mathbf{b} \in S$. Složky řešení $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ jsou pak koeficienty lineární kombinace

$$x_1 \mathbf{s}_1(\mathbf{A}) + \ldots + x_n \mathbf{s}_n(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Ale i v případě, kdy $\mathbf{b} \notin S$, tj. řešení soustavy neexistuje, se můžeme pokusit nahradit její pravou stranu $\mathbf{b}$ co nejbližším vektorem z podprostoru S. Takto získaná nová soustava už má řešení, které můžeme právem považovat za nejlepší možné přibližné řešení původní soustavy.

Pseudoinverzní matice X - Aplikace

Věta 2.6

Pro $\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n$ *funkce* $\boxed{||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||}$ *nabývá svého minima v bodě* $\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{A}^{(-1)}\mathbf{b}}$. *Body v* $\mathbf{K}^n$, *kde* $||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||$ *nabývá svého minima, tvoří afinní podprostor*

$$\boxed{\mathbf{A}^{(-1)}\mathbf{b} + \{\mathbf{z} \in \mathbf{K}^n \mid \mathbf{Az} = \mathit{0}\}.}$$

Pseudoinverzní matice X - Aplikace

Věta 2.6

Pro $\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n$ *funkce* $\boxed{||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||}$ *nabývá svého minima v bodě* $\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{A}^{(-1)}\mathbf{b}}$. *Body v* $\mathbf{K}^n$, *kde* $||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||$ *nabývá svého minima, tvoří afinní podprostor*

$$\boxed{\mathbf{A}^{(-1)}\mathbf{b} + \{\mathbf{z} \in \mathbf{K}^n \mid \mathbf{Az} = \mathit{0}\}.}$$

V úlohách ***lineární regrese*** máme zadané hodnoty $y_1, \dots, y_m$ neznámé funkce f v bodech $x_1, \dots, x_m$ jejího definičního oboru, získané většinou měřením. Funkci f chceme aproximovat lineární kombinací funkcí $f_1, \dots, f_n$, které známe, či alespoň jsou nám známé jejich hodnoty $a_{ij} = f_j(x_i)$ v bodech $x_1, \dots, x_m$.

Pseudoinverzní matice XI - Aplikace - opakování

Obvykle je m podstatně větší než n. V optimálním případě se nám může podařit sestrojit funkci $f = c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n$ přímo jako lineární kombinaci funkcí f_j tak, aby f v bodech x_i nabývala předem předepsané hodnoty y_i, tj.

$$\boxed{y_i = f(x_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j.}$$

Pseudoinverzní matice XI - Aplikace - opakování

Obvykle je m podstatně větší než n. V optimálním případě se nám může podařit sestrojit funkci $f = c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n$ přímo jako lineární kombinaci funkcí f_j tak, aby f v bodech x_i nabývala předem předepsané hodnoty y_i, tj.

$$\boxed{y_i = f(x_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j.}$$

Pokud označíme $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$, vidíme, že vlastně hledáme řešení $\mathbf{c}$ soustavy

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}.}$$

Pseudoinverzní matice XI - Aplikace - opakování

Obvykle je m podstatně větší než n. V optimálním případě se nám může podařit sestrojit funkci $f = c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n$ přímo jako lineární kombinaci funkcí f_j tak, aby f v bodech x_i nabývala předem předepsané hodnoty y_i, tj.

$$\boxed{y_i = f(x_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j.}$$

Pokud označíme $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$, vidíme, že vlastně hledáme řešení $\mathbf{c}$ soustavy

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}.}$$

Tato soustava je v typickém případě neřešitelná.

Pseudoinverzní matice XII - Aplikace

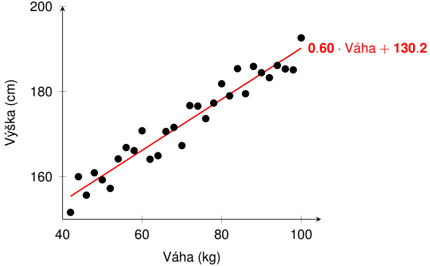
Uvažme následující úlohu: Předpokládejme, že mezi veličinami x a y je vztah

$$y = a + bx.$$

Naměříme hodnoty $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ pro $x_i \not x_j, i \neq j$. Chceme najít a a b tak, aby součet čtverců

$$(y_1 - a - bx_1)^2 + (y_2 - a - bx_2)^2 + \cdots + (y_n - a - bx_n)^2$$

byl minimální.



Pseudoinverzní matice XIII - Aplikace

To vede k řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot a + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ tj.}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

Pseudoinverzní matice XIV - Aplikace

Tedy $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ najdeme jako vektor (pseudořešení naší soustavy)

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}^{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Nutně $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$ je matice typu 2×2, která je invertibilní. Odtud

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^* \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Polární rozklad matice I

Motivace: Na polární rozklad matice se můžeme dívat jako na zobecnění exponenciálního tvaru komplexního čísla. Vezměme lineární zobrazení $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\varphi(z) = (a + \mathrm{i}b) \cdot z$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak $\boxed{a + \mathrm{i}b = r \cdot (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha),\ r \geq 0}$.

Na tuto rovnost se můžeme dívat jako na vyjádření bodu z komplexní roviny v polárních souřadnicích. Odtud zřejmě název **polární rozklad**.

Polární rozklad matice I

Motivace: Na polární rozklad matice se můžeme dívat jako na zobecnění exponenciálního tvaru komplexního čísla. Vezměme lineární zobrazení $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\varphi(z) = (a + \mathrm{i}b) \cdot z$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak $\boxed{a + \mathrm{i}b = r \cdot (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha),\ r \geq 0}$.

Na tuto rovnost se můžeme dívat jako na vyjádření bodu z komplexní roviny v polárních souřadnicích. Odtud zřejmě název **polární rozklad**.

Matice typu 1×1 s prvkem $\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$ je vždy unitární, matice typu 1×1 s prvkem $r \in \mathbb{R}$ je samoadjungovaná, pro $r > 0$ pak pozitivně definitní. Totiž,

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) \cdot (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^* &= (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) \cdot (\cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha) \\ &= \cos 0 - \mathrm{i}\sin 0 = 1 \\ r^* &= r.\end{aligned}$$

Polární rozklad matice II

Věta 2.7

Věta o polárním rozkladu matice *Nechť* $\mathbf{A}$ *je čtvercová matice nad* $\mathbb{R}$ *nebo* $\mathbb{C}$*. Pak existuje samoadjungovaná* $(\mathbf{R} = \mathbf{R}^*)$ *pozitivně semidefinitní* $(\langle \mathbf{Rx}, \mathbf{x} \rangle \geq 0)$ *matice* $\mathbf{R}$ *a unitární matice* $\mathbf{U}$ *tak, že* $\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}}$.

Navíc platí, že $\mathbf{R}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*$ *(píšeme* $\boxed{\mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*}}$*).*

Je-li $\mathbf{A}$ *invertibilní, je tento rozklad jednoznačný.*

Gramův-Schmidtův OP a QR-rozklad I - opakování

Nechť $\mathbf{A}$ je invertibilní čtvercová matice nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Tedy její sloupce $\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_n$ jsou lineárně nezávislé vektory. Víme, že pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu můžeme najít ortogonální (a tedy nenulové) vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ tak, že

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_1 &= \mathbf{u}_1 = R_{11}\mathbf{u}_1\\
\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_2 &= R_{12}\mathbf{u}_1 + R_{22}\mathbf{u}_2\\
\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_3 &= R_{13}\mathbf{u}_1 + R_{23}\mathbf{u}_2 + R_{33}\mathbf{u}_3\\
\vdots &= \qquad\qquad \vdots\\
\vdots &= \qquad\qquad \vdots\\
\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_n &= R_{1n}\mathbf{u}_1 + R_{2n}\mathbf{u}_2 + R_{33}\mathbf{u}_3 + \cdots + R_{nn}\mathbf{u}_n
\end{aligned}
$$

Gramův-Schmidtův OP a QR-rozklad II - opakování

$$\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_1,\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_2,\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_3,\ldots,\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_n\right)=\left(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\ldots,\mathbf{u}_n\right)\cdot\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \ldots & R_{1n} \\ 0 & R_{22} & R_{23} & \ldots & R_{2n} \\ 0 & 0 & R_{33} & \ldots & R_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & R_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$\underbrace{\left(\frac{\mathbf{u}_1}{||\mathbf{u}_1||},\frac{\mathbf{u}_2}{||\mathbf{u}_2||},\frac{\mathbf{u}_3}{||\mathbf{u}_3||},\ldots,\frac{\mathbf{u}_n}{||\mathbf{u}_n||}\right)}_{\mathbf{Q}}\begin{pmatrix} (||\mathbf{u}_1||R_{11}) & (||\mathbf{u}_2||R_{12}) & (||\mathbf{u}_3||R_{13}) & \ldots & (||\mathbf{u}_n||R_{1n}) \\ 0 & ||\mathbf{u}_2||R_{22} & (||\mathbf{u}_3||R_{23}) & \ldots & (||\mathbf{u}_n||R_{2n}) \\ 0 & 0 & (||\mathbf{u}_2||R_{33}) & \ldots & (||\mathbf{u}_n||R_{3n}) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (||\mathbf{u}_n||R_{nn}) \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$ unitární nebo ortogonální matice, $\mathbf{R}$ horní trojúhelníková matice.

Gramův-Schmidtův OP a QR-rozklad III - opakování

Aplikace QR-rozkladu:

Platí

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{R} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{b}.$$

Poslední rovnice lze snadno spočítat bez použití Gaussovy eliminace, protože **R** je horní trojúhelníková matice.