11. BILINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ FORMY

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

14. února 2020

Abstrakt

Nejjednodušším netriviálním příkladem multilineárních zobrazení jsou tzv. *bilineární zobrazení*. Z nich se budeme soustředit hlavně na *bilineární formy*, tj. na bilineární zobrazení s hodnotami v příslušném číselném tělese. Od bilineárních forem je už jen krok k tzv. *kvadratickým formám*.

Abstrakt

Nejjednodušším netriviálním příkladem multilineárních zobrazení jsou tzv. *bilineární zobrazení*. Z nich se budeme soustředit hlavně na *bilineární formy*, tj. na bilineární zobrazení s hodnotami v příslušném číselném tělese. Od bilineárních forem je už jen krok k tzv. *kvadratickým formám*.

Tímto krokem vystoupíme ze světa objektů lineárních (tj. "prvého stupně") a dostaneme sa do světa objektů kvadratických (tj. "druhého stupně").

Abstrakt

Nejjednodušším netriviálním příkladem multilineárních zobrazení jsou tzv. *bilineární zobrazení*. Z nich se budeme soustředit hlavně na *bilineární formy*, tj. na bilineární zobrazení s hodnotami v příslušném číselném tělese. Od bilineárních forem je už jen krok k tzv. *kvadratickým formám*.

Tímto krokem vystoupíme ze světa objektů lineárních (tj. "prvého stupně") a dostaneme sa do světa objektů kvadratických (tj. "druhého stupně").

V celé kapitole K označuje nějaké pevné ale jinak libovolné číselné těleso. Vektorovým prostorem budeme rozumět vektorový prostor nad K.

Obsah přednášky I

- Bilineární zobrazení a bilineární formy
  - Matice bilineární formy.
  - Hodnost bilineární formy.

Obsah přednášky I

- Bilineární zobrazení a bilineární formy
  - Matice bilineární formy.
  - Hodnost bilineární formy.
- Symetrické bilineární formy a kvadratické formy
  - Symetrické a antisymetrické bilineární formy.
  - Rozklad bilineární formy, kvadratická a polární forma.

Obsah přednášky I

- Bilineární zobrazení a bilineární formy
  - Matice bilineární formy.
  - Hodnost bilineární formy.
- Symetrické bilineární formy a kvadratické formy
  - Symetrické a antisymetrické bilineární formy.
  - Rozklad bilineární formy, kvadratická a polární forma.
- Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem
  - Lagrangeova metoda.
  - Kongruence matic a diagonalizace symetrických matic.

Bilineární zobrazení a bilineární formy I

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K. Říkáme, že $F : U \times V \to W$ je ***bilineární zobrazení***, pokud pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U$, $\mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$ a $c_1, c_2 \in K$ platí

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{x}, c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2) &= c_1F(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + c_2F(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2), \\
F(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) &= c_1F(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + c_2F(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}).
\end{aligned}
$$

Bilineární zobrazení a bilineární formy I

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K. Říkáme, že $F : U \times V \to W$ je ***bilineární zobrazení***, pokud pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U$, $\mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$ a $c_1, c_2 \in K$ platí

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2) &= c_1 F(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + c_2 F(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2), \\ F(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) &= c_1 F(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + c_2 F(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Zobrazení $F : U \times V \to W$ je bilineární právě tehdy, když

1. pro libovolné pevné $\mathbf{x} \in U$ je přiřazením $\mathbf{y} \mapsto F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ definované lineární zobrazení $V \to W$
2. a pro libovolné pevné $\mathbf{y} \in V$ je přiřazením $\mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ definované lineární zobrazení $U \to W$.

Bilineární zobrazení a bilineární formy II

Příklad

Pro pevné m, n, p *je předpisem* $F(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *dané bilineární zobrazení* $F : K^{m\times n} \times K^{n\times p} \to K^{m\times p}$. *Tedy násobení matic je bilineární zobrazení mezi vektorovými prostory matic příslušných rozměrů.*

Bilineární zobrazení a bilineární formy II

Příklad

Pro pevné m, n, p je předpisem $F(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *dané bilineární zobrazení* $F : K^{m\times n} \times K^{n\times p} \to K^{m\times p}$. *Tedy násobení matic je bilineární zobrazení mezi vektorovými prostory matic příslušných rozměrů.*

Příklad

Pro libovolné vektorové prostory U, V *je předpisem* $F(\varphi, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ *definované bilineární zobrazení*

$$F : \mathcal{L}(V, U) \times V \to U.$$

To znamená, že na dosazení argumentu do funkce se můžeme dívat jako na bilineární zobrazení na příslušných vektorových prostorech. Nejdůležitějším případem takového bilineárního zobrazení je tzv. dualita $V^* \times V \to K$.

Bilineární zobrazení a bilineární formy III

Příklad

Pro libovolné vektorové prostory U, V, W *je předpisem* $F(\varphi, \psi) = \varphi \circ \psi$ *definované bilineární zobrazení* $F : \mathcal{L}(V, U) \times \mathcal{L}(W, V) \to \mathcal{L}(W, U)$.

Tedy kompozici můžeme chápat jako bilineární zobrazení na uvedených vektorových prostorech lineárních zobrazení.

Bilineární zobrazení a bilineární formy III

Příklad

Pro libovolné vektorové prostory U, V, W je předpisem $F(\varphi, \psi) = \varphi \circ \psi$ definované bilineární zobrazení $F : \mathcal{L}(V, U) \times \mathcal{L}(W, V) \to \mathcal{L}(W, U)$.

Tedy kompozici můžeme chápat jako bilineární zobrazení na uvedených vektorových prostorech lineárních zobrazení.

Bilineární formou na vektorových prostorech U, V rozumíme libovolné bilineární zobrazení $F : U \times V \to K$.

Bilineární zobrazení a bilineární formy IV

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory s bázemi $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$ resp. $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

Bilineární zobrazení a bilineární formy IV

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory s bázemi $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$ resp. $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

Potom pro libovolnou matici $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ je předpisem

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}}^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{y})_{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

kde $(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = (x_1, \ldots, x_m)^T$, $(\mathbf{y})_{\boldsymbol{\beta}} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ jsou souřadnice vektorů $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{y} \in V$ v příslušných bazích, definovaná bilineární forma $F : U \times V \to K$.

Bilineární zobrazení a bilineární formy IV

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory s bázemi $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$ resp. $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

Potom pro libovolnou matici $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ je předpisem

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}}^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{y})_{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

kde $(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = (x_1, \ldots, x_m)^T$, $(\mathbf{y})_{\boldsymbol{\beta}} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ jsou souřadnice vektorů $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{y} \in V$ v příslušných bazích, definovaná bilineární forma $F : U \times V \to K$.

Obráceně, každá bilineární forma na vektorových prostorech U, V má uvedený tvar pro jednoznačně určenou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, kde

$$a_{ij} = F(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j).$$

Bilineární zobrazení a bilineární formy V

Maticí bilineární formy $F : U \times V \to K$ vzhledem na báze $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ nazýváme matici

$$[F]_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \big(F(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j)\big) \in K^{m \times n},$$

která je složena z hodnot formy F na dvojicích vektorů bazí $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$.

Bilineární zobrazení a bilineární formy V

Maticí bilineární formy $F : U \times V \to K$ vzhledem na báze $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ nazýváme matici

$$[F]_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \big(F(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j)\big) \in K^{m \times n},$$

která je složena z hodnot formy F na dvojicích vektorů bazí $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$.

Tvrzení

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory s bázemi $\boldsymbol{\alpha}$, resp. $\boldsymbol{\beta}$ a $F : U \times V \to K$ je bilineární forma. Potom pro všechna $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{y} \in V$ platí

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}}^T \cdot [F]_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot (\mathbf{y})_{\boldsymbol{\beta}}$$

a $\mathbf{A} = [F]_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je jediná matice s touto vlastností.

Bilineární zobrazení a bilineární formy VI

Speciálně každá bilineární forma

$$F : K^m \times K^n \to K$$

na (sloupcových) vektorových prostorech K^m, K^n má tvar

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

kde $\mathbf{A} = [F]_{\varepsilon^{(m)}, \varepsilon^{(n)}}$ je matice formy F vzhledem na kanonickou bázi $\varepsilon^{(m)}$, $\varepsilon^{(n)}$.

Bilineární zobrazení a bilineární formy VI

Speciálně každá bilineární forma

$$F : K^m \times K^n \to K$$

na (sloupcových) vektorových prostorech K^m, K^n má tvar

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

kde $\mathbf{A} = [F]_{\varepsilon^{(m)}, \varepsilon^{(n)}}$ je matice formy F vzhledem na kanonickou bázi $\varepsilon^{(m)}$, $\varepsilon^{(n)}$.

Tvrzení

Nechť V_1, V_2 jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_1$ jsou dvě báze prostoru V_1, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2$ jsou dvě báze prostoru V_2 a $F : V_1 \times V_2 \to K$ je bilineární forma. Potom

$$[F]_{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2} = (\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1})^T \cdot [F]_{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2}.$$

Bilineární zobrazení a bilineární formy VII

Příklad

Nechť $F : K^m \times K^n \to K$ je bilineární forma a $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ jsou nějaké báze prostorů K^m, resp. K^n. Označme $\mathbf{A} = [F]_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, $\mathbf{M} = [F]_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}}$ matice formy F vzhledem na báze $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, resp. vzhledem na kanonické báze $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$. Pak platí

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \left(\mathbf{P}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)},\boldsymbol{\alpha}}\right)^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)},\boldsymbol{\beta}} \\
&= \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\beta}, \\
\mathbf{M} &= \left(\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}}\right)^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}} \\
&= \left(\boldsymbol{\alpha}^{-1}\right)^T \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta}^{-1}.
\end{aligned}$$

Bilineární zobrazení a bilineární formy VIII

Tvrzení

Nechť U je m-rozměrný a V je n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem K. Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m\times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *jsou matice té stejné bilineární formy* $F : U \times V \to K$ *vzhledem na nějaké dvě dvojice bazí prostorů* U, V;

(ii) *existují regulární matice* $\mathbf{P} \in K^{m\times m}$, $\mathbf{Q} \in K^{n\times n}$ *takové, že* $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$;

(iii) $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$.

Bilineární zobrazení a bilineární formy VIII

Tvrzení

Nechť U je m-rozměrný a V je n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem K. Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *jsou matice té stejné bilineární formy* $F : U \times V \to K$ *vzhledem na nějaké dvě dvojice bazí prostorů* U, V;

(ii) *existují regulární matice* $\mathbf{P} \in K^{m \times m}$, $\mathbf{Q} \in K^{n \times n}$ *takové, že* $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$;

(iii) $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$.

Na základě uvedeného tvrzení můžeme korektně definovat ***hodnost*** $h(F)$ ***bilineární formy*** F na konečně rozměrných vektorových prostorech jako hodnost jejich matice vzhledem k libovolné dvojici bazí.

Bilineární zobrazení a bilineární formy VIII

Důsledek

Pro každou bilineární formu $F : U \times V \to K$ na konečně rozměrných vektorových prostorech nad tělesem K můžeme zvolit bázi $\boldsymbol{\alpha}$ prostoru U a bázi $\boldsymbol{\beta}$ prostoru V tak, že F má vzhledem k bazím $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ matici v blokovém tvaru

$$[F]_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_h & \mathbf{0}_{h,n-h} \\ \mathbf{0}_{m-h,h} & \mathbf{0}_{m-h,n-h} \end{pmatrix},$$

kde $m = \dim U$, $n = \dim V$ a $h = h(F)$.

Bilineární zobrazení a bilineární formy IX

Je-li $F : U \times V \to K$ libovolná bilineární forma, tak pro každé $\mathbf{x} \in U$ je předpisem $\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ definovaný lineární funkcionál $\varphi_{\mathbf{x}} : V \to K$, tj. prvek duálu $V^* = \mathcal{L}(V, K)$ vektorového prostoru V.

Bilineární zobrazení a bilineární formy IX

Je-li $F : U \times V \to K$ libovolná bilineární forma, tak pro každé $\mathbf{x} \in U$ je předpisem $\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ definovaný lineární funkcionál $\varphi_{\mathbf{x}} : V \to K$, tj. prvek duálu $V^* = \mathcal{L}(V, K)$ vektorového prostoru V.

Položíme-li $F^*(\mathbf{x}) = \varphi_{\mathbf{x}}$, je tím definované zobrazení $F^* : U \to V^*$.

Bilineární zobrazení a bilineární formy IX

Je-li $F : U \times V \to K$ libovolná bilineární forma, tak pro každé $\mathbf{x} \in U$ je předpisem $\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ definovaný lineární funkcionál $\varphi_{\mathbf{x}} : V \to K$, tj. prvek duálu $V^* = \mathcal{L}(V, K)$ vektorového prostoru V.

Položíme-li $F^*(\mathbf{x}) = \varphi_{\mathbf{x}}$, je tím definované zobrazení $F^* : U \to V^*$.

Budeme se zabývat otázkou, pro jaké F má ***každý*** lineární funkcionál $\varphi \in V^*$ tvar $\varphi = F^*(\mathbf{x})$ pro nějaké, případně pro jediné $\mathbf{x} \in U$.

Bilineární zobrazení a bilineární formy X

Věta

(a) *Nechť* U, V *jsou vektorové prostory a* $F : U \times V \to K$ *je bilineární forma. Potom* $F^* : U \to V^*$ *je lineární zobrazení.*

(b) *Jsou-li* U, V *konečně rozměrné, pak* $h(F^*) = h(F)$.
V důsledku toho je F^* *injektivní právě tehdy, když* $h(F) = \dim U$, *a* F^* *je surjektivní právě tehdy, když* $h(F) = \dim V$.

Bilineární zobrazení a bilineární formy X

Věta

(a) *Nechť* U, V *jsou vektorové prostory a* $F : U \times V \to K$ *je bilineární forma. Potom* $F^* : U \to V^*$ *je lineární zobrazení.*

(b) *Jsou-li* U, V *konečně rozměrné, pak* $h(F^*) = h(F)$. *V důsledku toho je* F^* *injektivní právě tehdy, když* $h(F) = \dim U$, *a* F^* *je surjektivní právě tehdy, když* $h(F) = \dim V$.

Důsledek

Nechť U, V *jsou konečně rozměrné vektorové prostory stejné dimenze. Potom pro každou bilineární formu* $F : U \times V \to K$ *jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) $F^* : U \to V^*$ *je lineární izomorfismus;*

(ii) $h(F) = \dim U = \dim V$;

(iii) *pro libovolné báze* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *prostorů* U, *resp.* V *je* $[F]_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ *regulární matice.*

Bilineární zobrazení a bilineární formy XI

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory stejné dimenze.
Bilineární forma $F : U \times V \to K$ sa nazývá ***regulární***, pokud splňuje některou (a tedy všechny) z podmínek posledního důsledku; v opačném případě se F nazývá ***singulární***.

Bilineární zobrazení a bilineární formy XI

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory stejné dimenze.
Bilineární forma $F : U \times V \to K$ sa nazývá ***regulární***, pokud splňuje některou (a tedy všechny) z podmínek posledního důsledku; v opačném případě se F nazývá ***singulární***.

Můžeme pak zvolit bázi $\boldsymbol{\alpha}$ prostoru U a bázi $\boldsymbol{\beta}$ prostoru V tak, že F má vzhledem k bazím $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ matici

$$[F]_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{I}_n,$$

kde $\dim U = \dim V = n$.

Symetrické bilineární formy a kvadratické formy I

V této části se budeme výlučně věnovat bilineárním formám, ve kterých první i druhá proměnná probíhá nad tím stejným vektorovým prostorem V, t. j. bilineárními formami tvaru $F : V \times V \to K$. Budeme je nazývat ***bilineárními formami na vektorovém prostoru*** V.

Symetrické bilineární formy a kvadratické formy I

V této části se budeme výlučně věnovat bilineárním formám, ve kterých první i druhá proměnná probíhá nad tím stejným vektorovým prostorem V, t. j. bilineárními formami tvaru $F : V \times V \to K$. Budeme je nazývat ***bilineárními formami na vektorovém prostoru*** V.

Bilineární forma $F : V^2 \to K$ se nazývá ***symetrická***, pokud pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Symetrické bilineární formy a kvadratické formy I

V této části se budeme výlučně věnovat bilineárním formám, ve kterých první i druhá proměnná probíhá nad tím stejným vektorovým prostorem V, t. j. bilineárními formami tvaru $F : V \times V \to K$. Budeme je nazývat ***bilineárními formami na vektorovém prostoru*** V.

Bilineární forma $F : V^2 \to K$ se nazývá ***symetrická***, pokud pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Bilineární forma $F : V^2 \to K$ sa nazývá ***antisymetrická***, pokud pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -F(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Symetrické bilineární formy a kvadratické formy II

Tvrzení

Nechť F je bilineární forma na vektorovém prostoru V nad tělesem K tak, že char $K \neq 2$. Pak F můžeme rozložit na součet

$$F = F_0 + F_1$$

pro jednoznačně určené bilineární formy F_0, F_1 na V, přičemž F_0 je symetrická a F_1 je antisymetrická.

Symetrické bilineární formy a kvadratické formy II

Tvrzení

Nechť F je bilineární forma na vektorovém prostoru V nad tělesem K tak, že char $K \neq 2$. Pak F můžeme rozložit na součet

$$F = F_0 + F_1$$

pro jednoznačně určené bilineární formy F_0, F_1 na V, přičemž F_0 je symetrická a F_1 je antisymetrická.

Je-li F bilineární forma na konečně rozměrném vektorovém prostoru V s bází $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, tak pod ***maticí formy*** F vzhledem na tuto bázi budeme rozumět její matici vzhledem na dvojici bazí $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}$; značíme ji $[F]_{\boldsymbol{\alpha}}$. Tedy

$$[F]_{\boldsymbol{\alpha}} = [F]_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}} = \big(F(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)\big)_{n \times n}.$$

Symetrické bilineární formy a kvadratické formy III

Připomeňme, že čtvercová matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ sa nazývá ***symetrická***, pokud $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, t. j. pokud pro všechna $i, j \leq n$ platí $a_{ij} = a_{ji}$; podobne, $\mathbf{A}$ sa nazývá ***antisymetrická***, pokud $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$, t. j. pokud pro všechna $i, j \leq n$ platí $a_{ij} = -a_{ji}$.

Symetrické bilineární formy a kvadratické formy III

Připomeňme, že čtvercová matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ sa nazývá ***symetrická***, pokud $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, t. j. pokud pro všechna $i, j \leq n$ platí $a_{ij} = a_{ji}$; podobne, $\mathbf{A}$ sa nazývá ***antisymetrická***, pokud $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$, t. j. pokud pro všechna $i, j \leq n$ platí $a_{ij} = -a_{ji}$.

Tvrzení

Nechť $\boldsymbol{\alpha}$ je libovolná báze konečně rozměrného vektorového prostoru V a $F : V^2 \to K$ je bilineární forma na V. Potom

(a) *F je symetrická právě tehdy, když její matice $[F]_\alpha$ je symetrická;*

(b) *F je antisymetrická právě tehdy, když její matice $[F]_\alpha$ je antisymetrická.*

Symetrické bilineární formy a kvadratické formy III

Násobení v tělese můžeme chápat jako bilineární formu $F : K^2 \to K$, kde $F(a, b) = ab$ pro $a, b \in K$. Ztotožněním první a druhé proměnné dostáváme zobrazení $q : K \to K$, kde $q(a) = F(a, a) = a^2$, t. j. "a-kvadrát".

Symetrické bilineární formy a kvadratické formy III

Násobení v tělese můžeme chápat jako bilineární formu $F : K^2 \to K$, kde $F(a, b) = ab$ pro $a, b \in K$. Ztotožněním první a druhé proměnné dostáváme zobrazení $q : K \to K$, kde $q(a) = F(a, a) = a^2$, t. j. "a-kvadrát".

Zobecněním tohoto postupu dospějeme k pojmu kvadratické formy.

Symetrické bilineární formy a kvadratické formy III

Násobení v tělese můžeme chápat jako bilineární formu $F : K^2 \to K$, kde $F(a, b) = ab$ pro $a, b \in K$. Ztotožněním první a druhé proměnné dostáváme zobrazení $q : K \to K$, kde $q(a) = F(a, a) = a^2$, t. j. "a-kvadrát".

Zobecněním tohoto postupu dospějeme k pojmu kvadratické formy.

Zobrazení $q : V \to K$ vektorového prostoru V do tělesa K sa nazývá ***kvadratická forma*** na V, pokud existuje bilineární forma $F : V^2 \to K$ taková, že pro všechna $\mathbf{x} \in V$ platí

$$q(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

Říkáme, že bilineární forma F ***indukuje*** kvadratickou formu q.

Symetrické bilineární formy a kvadratické formy IV

Je-li $F : V^2 \to K$ nějaká bilineární forma a $G : V^2 \to K$ je libovolná antisymetrická bilineární forma, tak $F(\mathsf{x}, \mathsf{x}) = F(\mathsf{x}, \mathsf{x}) + G(\mathsf{x}, \mathsf{x})$, neboť nutně $G(\mathsf{x}, \mathsf{x}) = 0$. Zejména

$$F(\mathsf{x}, \mathsf{x}) = F_0(\mathsf{x}, \mathsf{x}) + F_1(\mathsf{x}, \mathsf{x}) = F_0(\mathsf{x}, \mathsf{x}).$$

Symetrické bilineární formy a kvadratické formy IV

Je-li $F : V^2 \to K$ nějaká bilineární forma a $G : V^2 \to K$ je libovolná antisymetrická bilineární forma, tak $F(\mathsf{x}, \mathsf{x}) = F(\mathsf{x}, \mathsf{x}) + G(\mathsf{x}, \mathsf{x})$, neboť nutně $G(\mathsf{x}, \mathsf{x}) = 0$. Zejména

$$F(\mathsf{x}, \mathsf{x}) = F_0(\mathsf{x}, \mathsf{x}) + F_1(\mathsf{x}, \mathsf{x}) = F_0(\mathsf{x}, \mathsf{x}).$$

Polární formou kvadratické formy $q : V \to K$ nazýváme ***symetrickou*** bilineární formu $F : V^2 \to K$, která indukuje formu q.

Symetrické bilineární formy a kvadratické formy IV

Je-li $F : V^2 \to K$ nějaká bilineární forma a $G : V^2 \to K$ je libovolná antisymetrická bilineární forma, tak $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + G(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, neboť nutně $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$. Zejména

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = F_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + F_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = F_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

Polární formou kvadratické formy $q : V \to K$ nazýváme ***symetrickou*** bilineární formu $F : V^2 \to K$, která indukuje formu q.

Tvrzení

Nechť q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V nad tělesem K tak, že char $K \neq 2$. *Potom existuje jediná symetrická bilineární forma $F : V^2 \to K$ tak, že*

$$q(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

Symetrické bilineární formy a kvadratické formy V

Tvrzení

Nechť $q : V \to K$ je kvadratická forma a $F : V^2 \to K$ je její polární forma tak, že $\operatorname{char} K \neq 2$. Potom pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \tfrac{1}{2}(q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})) \\ &= \tfrac{1}{2}(q(\mathbf{x}) + q(\mathbf{y}) - q(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \\ &= \tfrac{1}{4}(q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - q(\mathbf{x}-\mathbf{y})). \end{aligned}$$

Symetrické bilineární formy a kvadratické formy V

Tvrzení

Nechť $q : V \to K$ je kvadratická forma a $F : V^2 \to K$ je její polární forma tak, že char $K \neq 2$. Potom pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \tfrac{1}{2}(q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})) \\ &= \tfrac{1}{2}(q(\mathbf{x}) + q(\mathbf{y}) - q(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \\ &= \tfrac{1}{4}(q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x} - \mathbf{y})). \end{aligned}$$

Tyto rovnosti jsou jednoduchým zevšeobecněním známých vzorců

$$\begin{aligned} ab &= \tfrac{1}{2}\left((a+b)^2 - a^2 - b^2\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(a^2 + b^2 - (a-b)^2\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left((a+b)^2 - (a-b)^2\right) \end{aligned}$$

platných pro libovolné $a, b \in K$.

Symetrické bilineární formy a kvadratické formy VI

Maticí kvadratické formy $q : V \to K$ na konečně rozměrném vektorovém prostoru V nad tělesem K tak, že $char\, K \neq 2$, vzhledem na bázi α nazýváme matici její polární formy vzhledem na tuto bázi a značíme ji $[q]_\alpha$.
Matice $[q]_\alpha$ je tímto požadavkem **jednoznačně určená** a je to vždy **symetrická matice**.

Symetrické bilineární formy a kvadratické formy VI

Maticí kvadratické formy $q : V \to K$ na konečně rozměrném vektorovém prostoru V nad tělesem K tak, že $char\, K \neq 2$, vzhledem na bázi α nazýváme matici její polární formy vzhledem na tuto bázi a značíme ji $[q]_\alpha$.
Matice $[q]_\alpha$ je tímto požadavkem **jednoznačně určená** a je to vždy **symetrická matice**.

Hodností kvadratické formy q potom nazýváme hodnost její matice vzhledem na jakoukoliv bázi a značíme ji $h(q)$.
Zřejmě hodnost $h(q)$ nezávisí od volby báze a rovná sa hodnosti $h(F)$ příslušné polární formy.

Symetrické bilineární formy a kvadratické formy VI

Maticí kvadratické formy $q : V \to K$ na konečně rozměrném vektorovém prostoru V nad tělesem K tak, že $char\, K \neq 2$, vzhledem na bázi α nazýváme matici její polární formy vzhledem na tuto bázi a značíme ji $[q]_\alpha$.
Matice $[q]_\alpha$ je tímto požadavkem **jednoznačně určená** a je to vždy **symetrická matice**.

Hodností kvadratické formy q potom nazýváme hodnost její matice vzhledem na jakoukoliv bázi a značíme ji $h(q)$.
Zřejmě hodnost $h(q)$ nezávisí od volby báze a rovná sa hodnosti $h(F)$ příslušné polární formy.

Kvadratická forma sa nazývá ***regulární***, resp. ***singulární***, pokud má příslušnou vlastnost její polární forma.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem I

Je-li $F : V^2 \to K$ libovolná bilineární forma na konečně rozměrném vektorovém priestoru V a $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ je její matice vzhledem k nějaké bázi $\boldsymbol{\alpha}$ prostoru V, tak pro indukovanou kvadratickou formu $q : V \to K$ a všechna $\mathbf{x} \in V$ platí

$$q(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}}^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

kde $(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ jsou příslušné souřadnice.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem I

Je-li $F : V^2 \to K$ libovolná bilineární forma na konečně rozměrném vektorovém priestoru V a $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ je její matice vzhledem k nějaké bázi $\boldsymbol{\alpha}$ prostoru V, tak pro indukovanou kvadratickou formu $q : V \to K$ a všechna $\mathbf{x} \in V$ platí

$$q(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}}^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

kde $(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ jsou příslušné souřadnice.

Pokud F je navíc symetrická, t. j. pokud $\mathbf{A}$ je přímo matice formy q v bázi $\boldsymbol{\alpha}$, tak uvedený výraz můžeme dále upravit na tvar

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j.$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem II

Volbou vhodné báze, tj. "zavedením nových souřadnic", se můžeme zbavit všech sčítanců $a_{ij}x_ix_j$ obsahujících smíšené členy a upravit tak celý výraz na *diagonální tvar*

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2.$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem II

Volbou vhodné báze, tj. "zavedením nových souřadnic", se můžeme zbavit všech sčítanců $a_{ij}x_ix_j$ obsahujících smíšené členy a upravit tak celý výraz na *diagonální tvar*

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2.$$

Příslušný výpočet můžeme uskutečnit pomocí tzv. *Lagrangeovy metody*, která používa dva typy úprav: jednak metodu *doplnění na čtverec*, známou ze střední školy, jednak substituci

$$x_ix_j = \frac{1}{4}(x_i + x_j)^2 - \frac{1}{4}(x_i - x_j)^2,$$

kterou použijeme v případě, když pro $i \neq j$ je $a_{ij} \neq 0$, ale $a_{ii} = a_{jj} = 0$.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem III

Příklad

Kvadratická forma $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *je pro* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ *daná jako*

$$q(\mathbf{x}) = -2x_2^2 + x_1x_2 + 2x_2x_3 - 3x_3x_4$$

$$= \mathbf{x}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}\,.$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem III

Příklad

Kvadratická forma $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *je pro* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ *daná jako* $q(\mathbf{x}) = -2x_2^2 + x_1x_2 + 2x_2x_3 - 3x_3x_4$

$$= \mathbf{x}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}\,.$$

Všechny smíšené členy obsahující x_2 *připojíme k členu* $-2x_2^2$ *a doplníme na čtverec:*

$$q(\mathbf{x}) = -2\left(x_2^2 - \tfrac{1}{2}x_1x_2 - x_2x_3\right) - 3x_3x_4$$

$$= -2\left(\left(x_2 - \tfrac{1}{4}x_1 - \tfrac{1}{2}x_3\right)^2 - \tfrac{1}{16}x_1^2 - \tfrac{1}{4}x_3^2 - \tfrac{1}{4}x_1x_3\right) - 3x_3x_4$$

$$= -\tfrac{1}{8}(x_1 - 4x_2 + 2x_3)^2 + \tfrac{1}{8}x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_3^2 + \tfrac{1}{2}x_1x_3 - 3x_3x_4\,.$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem IV

Poté připojíme smíšené členy obsahující x_1 k členu $\frac{1}{8}x_1^2$ a doplníme na čtverec. Dostaneme

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= -\tfrac{1}{8}(x_1 - 4x_2 + 2x_3)^2 + \tfrac{1}{8}(x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3) - 3x_3x_4 \\ &= -\tfrac{1}{8}(x_1 - 4x_2 + 2x_3)^2 \quad + \tfrac{1}{8}(x_1 + 2x_3)^2 - 3x_3x_4\,. \end{aligned}$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem IV

Poté připojíme smíšené členy obsahující x_1 k členu $\frac{1}{8}x_1^2$ a doplníme na čtverec. Dostaneme

$$
\begin{aligned}
q(\mathbf{x}) &= -\tfrac{1}{8}(x_1 - 4x_2 + 2x_3)^2 + \tfrac{1}{8}(x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3) - 3x_3x_4 \\
&= -\tfrac{1}{8}(x_1 - 4x_2 + 2x_3)^2 \quad + \tfrac{1}{8}(x_1 + 2x_3)^2 - 3x_3x_4\,.
\end{aligned}
$$

Pokud na $\mathbb{R}^4$ zavedeme nové souřadnice $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$, kde

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\
y_2 &= x_1 + 2x_3 \\
y_3 &= x_3 + x_4 \\
y_4 &= x_3 - x_4,
\end{aligned}
$$

tak původní kvadratická forma q v nich získá diagonální tvar

$$
q(\mathbf{x}) = q'(\mathbf{y}) = -\frac{1}{8}y_1^2 + \frac{1}{8}y_2^2 - \frac{3}{4}y_3^2 + \frac{3}{4}y_4^2\,.
$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem V

Matice

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

zabezpečuje změnu souřadnic $\mathbf{y} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem V

Matice

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

zabezpečuje změnu souřadnic $\mathbf{y} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$.

$\mathbf{Q}$ je maticí přechodu z kanonické báze ε do takové báze α prostoru $\mathbb{R}^4$, v které pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ platí $(\mathbf{x})_\alpha = \mathbf{y} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem V

Matice

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

zabezpečuje změnu souřadnic $\mathbf{y} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$.

$\mathbf{Q}$ je maticí přechodu z kanonické báze ε do takové báze $\boldsymbol{\alpha}$ prostoru $\mathbb{R}^4$, v které pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ platí $(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{y} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$. To znamená, že $\mathbf{Q} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\varepsilon} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}$. Tedy $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{Q}^{-1}$, tj. hledaná báze $\boldsymbol{\alpha}$ je tvořená sloupci matice

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem VI

Příklad

Nejednoznačnost diagonálního tvaru a příslušné transformace souřadnic.

$$\begin{aligned} q(x,y) &= 10x^2 + 5y^2 - 2xy \\ &= (x+2y)^2 + (3x-y)^2 \\ &= \tfrac{1}{10}(10x-y)^2 + \tfrac{49}{10}y^2. \end{aligned}$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem VI

Příklad

Nejednoznačnost diagonálního tvaru a příslušné transformace souřadnic.

$$\begin{aligned} q(x,y) &= 10x^2 + 5y^2 - 2xy \\ &= (x+2y)^2 + (3x-y)^2 \\ &= \tfrac{1}{10}(10x-y)^2 + \tfrac{49}{10}y^2. \end{aligned}$$

Tvrzení

Nechť $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ jsou dvě báze konečně rozměrného vektorového prostoru V a $F : V^2 \to K$ je bilineární forma na V. Potom pro matice $\mathbf{A} = [F]_{\boldsymbol{\alpha}}$, $\mathbf{B} = [F]_{\boldsymbol{\beta}}$ formy F v těchto bazích platí

$$\mathbf{B} = (\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}.$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem VII

Čtvercové matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ se nazývají ***kongruentní***, píšeme $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, pokud existuje regulární matice $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ tak, že

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}.$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem VII

Čtvercové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in K^{n\times n}$ se nazývají ***kongruentní***, píšeme $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, pokud existuje regulární matice $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ tak, že

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}.$$

Zřejmě kongruentní matice mají stejnou hodnost. Dále pro libovolné matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C} \in K^{n\times n}$ platí

$$\begin{gathered} \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}, \\ \mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \;\Rightarrow\; \mathbf{B} \equiv \mathbf{A}, \\ \mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \;\&\; \mathbf{B} \equiv \mathbf{C} \;\Rightarrow\; \mathbf{A} \equiv \mathbf{C}. \end{gathered}$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem VII

Čtvercové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in K^{n\times n}$ se nazývají ***kongruentní***, píšeme $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, pokud existuje regulární matice $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ tak, že

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}.$$

Zřejmě kongruentní matice mají stejnou hodnost. Dále pro libovolné matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C} \in K^{n\times n}$ platí

$$\begin{gathered} \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}, \\ \mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \ \Rightarrow \ \mathbf{B} \equiv \mathbf{A}, \\ \mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \ \& \ \mathbf{B} \equiv \mathbf{C} \ \Rightarrow \ \mathbf{A} \equiv \mathbf{C}. \end{gathered}$$

Jinak řečeno, vztah kongruence je *reflexivní*, *symetrický* a *tranzitivní*, tj. je *ekvivalencí* na množině $K^{n\times n}$.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem VIII

Dále platí implikace

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \ \& \ \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \ \Rightarrow \ \mathbf{A} = \mathbf{A}^T,$$

tj. pokud je jedna z dvou kongruentních matic symetrická, tak je symetrická i druhá z nich.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem VIII

Dále platí implikace

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \ \& \ \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \ \Rightarrow \ \mathbf{A} = \mathbf{A}^T,$$

tj. pokud je jedna z dvou kongruentních matic symetrická, tak je symetrická i druhá z nich.

Tvrzení

Nechť V je n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem K charakteristiky $\neq 2$. Potom pro libovolné symetrické matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n\times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *jsou matice té stejné symetrické bilineární formy $F : V \times V \to K$ vzhledem k nějakým dvěma bazím prostoru V;*

(ii) $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *jsou matice té stejné kvadratické formy $q : V \to K$ vzhledem k nějakým dvěma bazím prostoru V;*

(iii) $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem VIII

Dále platí implikace

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \;\&\; \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \;\Rightarrow\; \mathbf{A} = \mathbf{A}^T,$$

tj. pokud je jedna z dvou kongruentních matic symetrická, tak je symetrická i druhá z nich.

Tvrzení

Nechť V je n-rozměrný vektorový prostor nad tělesem K charakteristiky $\neq 2$. Potom pro libovolné symetrické matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *jsou matice té stejné symetrické bilineární formy $F : V \times V \to K$ vzhledem k nějakým dvěma bazím prostoru V;*

(ii) $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *jsou matice té stejné kvadratické formy $q : V \to K$ vzhledem k nějakým dvěma bazím prostoru V;*

(iii) $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem IX

Matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n\times n}$ jsou kongruentní prostřednictvím regulární matice $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$. Matici $\mathbf{P}$ můžeme upravit na jednotkovou matici $\mathbf{I}_n$ pomocí elementárních *sloupcových* úprav, kterým zodpovídá rozklad matice $\mathbf{P}$ na součin elementárních matic

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_k.$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem IX

Matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in K^{n\times n}$ jsou kongruentní prostřednictvím regulární matice $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$. Matici $\mathbf{P}$ můžeme upravit na jednotkovou matici $\mathbf{I}_n$ pomocí elementárních *sloupcových* úprav, kterým zodpovídá rozklad matice $\mathbf{P}$ na součin elementárních matic

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_k.$$

Potom

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} \\ &= (\mathbf{E}_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_k)^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{E}_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_k) \\ &= \mathbf{E}_k^T \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_1^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_k.\end{aligned}$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem X

Nechť $\mathbf{C} \in K^{n\times n}$ je libovolná matice a $\mathbf{E} \in K^{n\times n}$ je elementární matice, která odpovídá nějaké ESO. Matice $\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}$ a $\mathbf{C}$ jsou kongruentní a navíc matice $\mathbf{E}^T$ odpovídá "stejné" ERO, jako byla ESO reprezentovaná maticí $\mathbf{E}$.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem X

Nechť $\mathbf{C} \in K^{n \times n}$ je libovolná matice a $\mathbf{E} \in K^{n \times n}$ je elementární matice, která odpovídá nějaké ESO. Matice $\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}$ a $\mathbf{C}$ jsou kongruentní a navíc matice $\mathbf{E}^T$ odpovídá "stejné" ERO, jako byla ESO reprezentovaná maticí $\mathbf{E}$.

Přesněji,

(a) pokud $\mathbf{E}$ odpovídala výměně i-tého a j-tého sloupce, tak $\mathbf{E}^T$ odpovídá výměně i-tého a j-tého řádku;

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem X

Nechť $\mathbf{C} \in K^{n \times n}$ je libovolná matice a $\mathbf{E} \in K^{n \times n}$ je elementární matice, která odpovídá nějaké ESO. Matice $\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}$ a $\mathbf{C}$ jsou kongruentní a navíc matice $\mathbf{E}^T$ odpovídá "stejné" ERO, jako byla ESO reprezentovaná maticí $\mathbf{E}$.

Přesněji,

(a) pokud $\mathbf{E}$ odpovídala výměně i-tého a j-tého sloupce, tak $\mathbf{E}^T$ odpovídá výměně i-tého a j-tého řádku;

(b) pokud $\mathbf{E}$ odpovídala vynásobení i-tého sloupce nenulovým skalárem $c \in K$, tak $\mathbf{E}^T$ zodpovídá vynásobení i-tého řádku tímtéž stejným skalárem c;

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem X

Nechť $\mathbf{C} \in K^{n\times n}$ je libovolná matice a $\mathbf{E} \in K^{n\times n}$ je elementární matice, která odpovídá nějaké ESO. Matice $\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}$ a $\mathbf{C}$ jsou kongruentní a navíc matice $\mathbf{E}^T$ odpovídá "stejné" ERO, jako byla ESO reprezentovaná maticí $\mathbf{E}$.

Přesněji,

(a) pokud $\mathbf{E}$ odpovídala výměně i-tého a j-tého sloupce, tak $\mathbf{E}^T$ odpovídá výměně i-tého a j-tého řádku;

(b) pokud $\mathbf{E}$ odpovídala vynásobení i-tého sloupce nenulovým skalárem $c \in K$, tak $\mathbf{E}^T$ zodpovídá vynásobení i-tého řádku tímtéž stejným skalárem c;

(c) pokud $\mathbf{E}$ odpovídala připočtení c-násobku i-tého sloupce k j-tému sloupci, tak $\mathbf{E}^T$ zodpovídá přičtení c-násobku i-tého řádku k j-tému řádku.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XI

Matice $\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}$ tedy vznikne z matice $\mathbf{C}$ pomocí dvojice symetricky sdružených elementárních úprav – jedné ESO a jedné ERO.
Navíc z asociativity násobení platí $\mathbf{E}^T \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{E}$, je tedy jedno, v jakém pořadí obě úpravy provedeme.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XI

Matice $\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}$ tedy vznikne z matice $\mathbf{C}$ pomocí dvojice symetricky sdružených elementárních úprav – jedné ESO a jedné ERO.
Navíc z asociativity násobení platí $\mathbf{E}^T \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{E}$, je tedy jedno, v jakém pořadí obě úpravy provedeme.

Úprava symetrické matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ na s ní kongruentní diagonální matici $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$ se realizuje v konečné posloupnosti kroků, z kterých každý sestáva z jedné ESO a s ní symetricky sdružené ERO.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XI

Matice $\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}$ tedy vznikne z matice $\mathbf{C}$ pomocí dvojice symetricky sdružených elementárních úprav – jedné ESO a jedné ERO.

Navíc z asociativity násobení platí $\mathbf{E}^T \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{E}$, je tedy jedno, v jakém pořadí obě úpravy provedeme.

Úprava symetrické matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ na s ní kongruentní diagonální matici $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$ se realizuje v konečné posloupnosti kroků, z kterých každý sestáva z jedné ESO a s ní symetricky sdružené ERO.

Posloupností příslušných ESO provedených na jednotkové matici $\mathbf{I}_n$ získáme též příslušnou matici přechodu $\mathbf{P}$ takovou, že platí $\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XII

Celý postup můžeme stručně zachytit pomocí schématu

$$\mathbf{A} \xrightarrow[\text{ERO}]{\text{ESO}} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{I}_n \xrightarrow{\text{ESO}} \mathbf{P}$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XII

Celý postup můžeme stručně zachytit pomocí schématu

$$\mathbf{A} \xrightarrow[\text{ERO}]{\text{ESO}} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{I}_n \xrightarrow{\text{ESO}} \mathbf{P}$$

Úprava symetrické matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ na s ní kongruentní diagonální matici $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$ se realizuje v konečné posloupnosti kroků, z kterých každý sestáva z jedné ESO a s ní symetricky sdružené ERO.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XII

Celý postup můžeme stručně zachytit pomocí schématu

$$\mathbf{A} \xrightarrow[\text{ERO}]{\text{ESO}} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{I}_n \xrightarrow{\text{ESO}} \mathbf{P}$$

Úprava symetrické matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ na s ní kongruentní diagonální matici $\mathbf{B} \in K^{n\times n}$ se realizuje v konečné posloupnosti kroků, z kterých každý sestáva z jedné ESO a s ní symetricky sdružené ERO.

Byla-li $\mathbf{A}$ matice nějaké symetrické bilineární formy, případně kvadratické formy v bázi $\boldsymbol{\alpha}$, tak $\mathbf{B}$ je maticí této formy v bázi $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P}$ (t. j. $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$).

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XII

Celý postup můžeme stručně zachytit pomocí schématu

$$\mathbf{A} \xrightarrow[\text{ERO}]{\text{ESO}} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{I}_n \xrightarrow{\text{ESO}} \mathbf{P}$$

Úprava symetrické matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ na s ní kongruentní diagonální matici $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$ se realizuje v konečné posloupnosti kroků, z kterých každý sestáva z jedné ESO a s ní symetricky sdružené ERO.

Byla-li $\mathbf{A}$ matice nějaké symetrické bilineární formy, případně kvadratické formy v bázi $\boldsymbol{\alpha}$, tak $\mathbf{B}$ je maticí této formy v bázi $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P}$ (t. j. $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$).

Pokud $\mathbf{A}$ je maticí příslušné formy na (sloupcovém) vektorovém prostoru K^n v kanonické bázi $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$, tak $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{P}$, t. j. vektory nové báze $\boldsymbol{\beta}$ jsou přímo sloupce matice $\mathbf{P}$.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XIII

Věta

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor nad tělesem K charakteristiky $\neq 2$. Potom

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XIII

Věta

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor nad tělesem K charakteristiky $\neq 2$. Potom

(a) každá symetrická matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ je kongruentní s nějakou diagonální maticí;

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XIII

Věta

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor nad tělesem K charakteristiky $\neq 2$. Potom

(a) *každá symetrická matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ je kongruentní s nějakou diagonální maticí;*

(b) *každá symetrická bilineární forma $F : V^2 \to K$ má ve vhodné bázi prostoru V diagonální matici;*

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XIII

Věta

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor nad tělesem K charakteristiky $\neq 2$. Potom

(a) *každá symetrická matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je kongruentní s nějakou diagonální maticí;*

(b) *každá symetrická bilineární forma $F : V^2 \to K$ má ve vhodné bázi prostoru V diagonální matici;*

(c) *každá kvadratická forma $q : V \to K$ má ve vhodné bázi prostoru V diagonální matici.*

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XIII

Věta

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor nad tělesem K charakteristiky $\neq 2$. Potom

(a) *každá symetrická matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ je kongruentní s nějakou diagonální maticí;*

(b) *každá symetrická bilineární forma $F : V^2 \to K$ má ve vhodné bázi prostoru V diagonální matici;*

(c) *každá kvadratická forma $q : V \to K$ má ve vhodné bázi prostoru V diagonální matici.*

Stačí dokázat jen tvrzení (a), tvrzení (b), (c) jsou už jeho bezprostředními důsledky. Popíšeme algoritmus, který nám říká, jaké ESO a ERO je nutno postupně aplikovat na matici $\mathbf{A}$.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XIV

(1) Nechť $i \leq n$ je nejmenší index takový, že $a_{ii} \neq 0$. Potom postupně pro každé $j \leq n$ takové, že $j \neq i$ a $a_{ij} = a_{ji} \neq 0$, připočteme
k j-tému sloupci matice $\left(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)$-násobek i-tého sloupce
a v takto získané matici připočteme
$\left(-\frac{a_{ji}}{a_{ii}}\right)$-násobek i-tého řádku k j-tému řádku.
Tedy pomocí diagonálního prvku $a_{ii} \neq 0$ ***vynulujeme*** všechny ostatní nenulové prvky i-tého řádku a i-tého sloupce.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XIV

(1) Nechť $i \leq n$ je nejmenší index takový, že $a_{ii} \neq 0$. Potom postupně pro každé $j \leq n$ takové, že $j \neq i$ a $a_{ij} = a_{ji} \neq 0$, připočteme
k j-tému sloupci matice $\left(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)$-násobek i-tého sloupce
a v takto získané matici připočteme
$\left(-\frac{a_{ji}}{a_{ii}}\right)$-násobek i-tého řádku k j-tému řádku.
Tedy pomocí diagonálního prvku $a_{ii} \neq 0$ ***vynulujeme*** všechny ostatní nenulové prvky i-tého řádku a i-tého sloupce.

(2) Nechť pro každé $i \leq n$ platí: je-li $a_{ii} \neq 0$, tak $a_{ij} = a_{ji} = 0$ pro každé $j \neq i$. Nechť $k \leq n$ je nejmenší index takový, že $a_{kk} = 0$, ale k-tý řádek není identicky nulový. Nechť dále $j \leq n$ je nejmenší index takový, že $a_{kj} = a_{jk} \neq 0$. Potom ke k-tému sloupci matice připočteme její j-tý sloupec a ke k-tému řádku takto získané matice připočteme její j-tý řádek. Výsledná matice má na místě (k, k) prvek
$a_{kj} + a_{jk} = 2a_{jk} \neq 0$.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XV

Úpravy typu (1) mají přednost, tj. *vykonáváme je tak dlouho, jak je to jenom možné nebo dokud nezískáme diagonální matici.*

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XV

Úpravy typu (1) mají přednost, tj. *vykonáváme je tak dlouho, jak je to jenom možné nebo dokud nezískáme diagonální matici.*

V opačném případě aplikujeme jednu úpravu typu (2). Po ní nikdy nedostaneme diagonální matici a vždy můžeme aplikovat úpravu typu (1). Takto postupujeme, pokud to jen lze.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XV

Úpravy typu (1) mají přednost, tj. *vykonáváme je tak dlouho, jak je to jenom možné nebo dokud nezískáme diagonální matici.*

V opačném případě aplikujeme jednu úpravu typu (2). Po ní nikdy nedostaneme diagonální matici a vždy můžeme aplikovat úpravu typu (1). Takto postupujeme, pokud to jen lze.

Pokud už nemůžeme aplikovat žádnou z úprav (1), (2), *znamená to, že jsme dospěli k diagonální matici.*

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XV

Úpravy typu (1) mají přednost, tj. *vykonáváme je tak dlouho, jak je to jenom možné nebo dokud nezískáme diagonální matici.*

V opačném případě aplikujeme jednu úpravu typu (2). Po ní nikdy nedostaneme diagonální matici a vždy můžeme aplikovat úpravu typu (1). Takto postupujeme, pokud to jen lze.

Pokud už nemůžeme aplikovat žádnou z úprav (1), (2), *znamená to, že jsme dospěli k diagonální matici.*

Protože po každé úpravě typu (1) přibudou alespoň dva nulové prvky mimo diagonálu a případné nenulové prvky mimo diagonálu, které přibyly v jejím důsledku nebo jedné úpravy typu (2), budou vynulované dalšími úpravami typu (1), celý postup nutně skončí po konečném počtu kroků.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XVI

Mimo úprav (1), (2) můžeme použít další dva typy úprav, bez kterých sa sice můžeme obejít, ale s jejich pomocí můžeme docílit "vhodnější" tvar diagonální matice formy případně matice prechodu.

(3) Výměna i-tého a j-tého sloupce matice a vzápětí i jejího i-tého a j-tého řádku.

(4) Vynásobení i-tého sloupce a vzápětí i i-tého řádku matice libovolným nenulovým skalárem $c \in K$ (diagonální prvek a_{ii} se tím změní na $c^2 a_{ii}$).

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XVI

Mimo úprav (1), (2) můžeme použít další dva typy úprav, bez kterých sa sice můžeme obejít, ale s jejich pomocí můžeme docílit "vhodnější" tvar diagonální matice formy případně matice prechodu.

(3) Výměna i-tého a j-tého sloupce matice a vzápětí i jejího i-tého a j-tého řádku.

(4) Vynásobení i-tého sloupce a vzápětí i i-tého řádku matice libovolným nenulovým skalárem $c \in K$ (diagonální prvek a_{ii} se tím změní na $c^2 a_{ii}$).

Úpravě (3) odpovídá záměně pořadí souřadnic $x_i \leftrightarrow x_j$ a (4) substituci x_i/c místo x_i.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XVII

Příklad

Budeme upravovat symetrickou matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

na s ní kongruentní diagonální tvar.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XVII

Příklad

Budeme upravovat symetrickou matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

na s ní kongruentní diagonální tvar.

Začneme úpravami typu (1). Nejprve vynulujeme pomocí prvku $a_{22} = -2$ zbývající nenulové prvky druhého sloupce a řádku. Za tím účelem připočteme $\frac{1}{4}$-násobek druhého sloupce k prvnímu sloupci a vzápětí vykonáme stejnou operaci s řádky. Potom připočteme $\frac{1}{2}$-násobek druhého sloupce k třetímu sloupci a to jisté provedeme s řádky.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XVIII

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1/8 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right)$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XIX

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1/8 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1/8 & 0 & 1/4 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right)$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XX

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1/8 & 0 & 1/4 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1/8 & 0 & 1/4 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 1/2 & -3/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 1/4 & 1 & 1/2 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right)$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XXI

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1/8 & 0 & 1/4 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 1/2 & -3/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 1/4 & 1 & 1/2 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1/8 & 0 & 1/4 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & -3/2 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 1/4 & 1 & 1/2 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right)$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XXII

Dále vynulujeme pomocí prvku $a_{11} = \frac{1}{8}$ zbývající nenulové prvky prvního sloupce a řádku, t. j. odpočítáme dvojnásobek prvního sloupce od třetího a to stejné provedeme s řádky. Příslušnou sloupcovou operaci provedeme i na matici získanou z $\mathbf{I}_4$.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XXIII

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1/8 & 0 & 1/4 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1/4 & 0 & 1/2 & -3/2 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
1/4 & 1 & 1/2 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1/8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1/4 & 0 & 0 & -3/2 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & -2 & 0 & & & & \\
1/4 & 1 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}\right)$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XXIV

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1/8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & -3/2 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & & & & \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1/8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & & & & \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right)$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XXV

Protože úpravu typu (1) nemůžeme dále aplikovat, použijeme úpravu typu (2).

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XXV

Protože úpravu typu (1) nemůžeme dále aplikovat, použijeme úpravu typu (2).

Připočítáme čtvrtý sloupec k třetímu a to stejné provedeme i pro řádky.
Potom už opět můžeme použít úpravu typu (1). Odpočítame $\frac{1}{2}$-násobek třetího sloupce od čtvrtého a to stejné provedeme i pro řádky.

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XXVI

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1/8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -3/2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & -2 & 0 & & & & \\
1/4 & 1 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1/8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -3/2 & -3/2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & -2 & 0 & & & & \\
1/4 & 1 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 1 & & & &
\end{array}\right)$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XXVII

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1/8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & -3/2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & & & & \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & & & \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1/8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3/2 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & & & & \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & & & \end{array}\right)$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XXVIII

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1/8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -3 & -3/2 & -2 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & -2 & 0 & & & & \\
1/4 & 1 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 1 & & & &
\end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1/8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -3/2 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & -2 & 1 & & & & \\
1/4 & 1 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 1 & -1/2 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 1/2 & & & &
\end{array}\right)$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XXIX

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1/8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3/2 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & & & & \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & & & & \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1/8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & & & & \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & & & & \end{array}\right)$$

Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem XXX

Je tedy

$$\mathbf{A} \cong \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P},$$

kde

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$