Jméno:

1	2	3	Celkem

A. Písemka z lineární algebry II, 8.6.2020 – početní část

Max. počet bodů 12, čistý čas 120 minut

1. Lineární operátor $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je rotací kolem přímky p

$$x_2 - x_3 = 0, x_1 = 0$$

převádějící bod $(2,0,0)^T$ na bod $(0, -\sqrt{2}, \sqrt{2})^T$.
Najděte matici A tak, aby ve standardních souřadnicích platilo $\varphi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Řešení doprovoďte slovním komentářem. Proveďte zkoušku. (*4 body*)

2. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a matici P, která realizuje podobnost $J = P^{-1} \cdot B \cdot P$. Řešení doprovoďte slovním komentářem. Proveďte zkoušku.

(*4 body*)

3. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ mějme afinní podprostor ρ generovaný jako afinní obal bodů $A = (1,1,1,1)^T$, $B = (2,0,1,3)^T$, $C = (3,2,0,1)^T$ a afinní podprostor σ generovaný jako afinní obal bodů $D = (0,-2,-2,1)^T$, $E = (2,-1,-3,\ 1)^T$, $F = (0,-1,-1,1)^T$. Určete dimenze a vzájemnou polohu afinních podprostorů ρ a σ. Řešení doprovoďte slovním komentářem. (*4 body*)

Vzorové řešení – početní část

1. Lineární operátor $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je rotací kolem přímky p

$$x_2 - x_3 = 0, x_1 = 0$$

převádějící bod $(2,0,0)^T$ na bod $(0,-\sqrt{2},\sqrt{2})^T$.
Najděte matici A tak, aby ve standardních souřadnicích platilo $\varphi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Řešení doprovoďte slovním komentářem. Proveďte zkoušku. *(4 body)*

Platí $\varphi((2,0,0)^T) = (0,-\sqrt{2},\sqrt{2})^T$. Tedy i $\varphi((1,0,0)^T) = (0,-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)^T$. Položme $\mathbf{v} = (1,0,0)^T$ a $\mathbf{w} = (0,-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)^T$. Pak $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Protože se jedná o otáčení a vektory $\mathbf{v},\mathbf{w}$ jsou kolmé, nutně $\varphi(\mathbf{w}) = -\mathbf{w}$.
Přímka p prochází počátkem a má směrový vektor $\mathbf{u} = (0,\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)^T$. Každý bod přímky p se zobrazí sám na sebe, zejména pak $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$.
Vidíme, že posloupnost $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ je ortonormální báze $\mathbb{R}^3$ (1 bod).
Zároveň má φ v bázi $\boldsymbol{\alpha}$ matici (1 bod)

$$(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Platí $A = (\varphi)_{\boldsymbol{\epsilon},\boldsymbol{\epsilon}} = (id)_{\boldsymbol{\epsilon},\boldsymbol{\alpha}} \cdot (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}} \cdot (id)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\epsilon}}$ (0.5 bodu). Zároveň (0.5 bodu)

$$(id)_{\boldsymbol{\epsilon},\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad (id)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Platí

$$(id)_{\boldsymbol{\epsilon},\boldsymbol{\alpha}} \cdot (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

a (1 bod)

$$A = (\varphi)_{\boldsymbol{\epsilon},\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a matici P, která realizuje podobnost $J = P^{-1} \cdot B \cdot P$. Řešení doprovoďte slovním komentářem. Proveďte zkoušku. *(4 body)*

Vypočtěme (0.5 bodu) Laplaceovým rozvojem dle prvního řádku determinant

$$|B - \lambda I_4| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(2-\lambda)^3 = (2-\lambda)^4.$$

Vyřešíme homogenní rovnici $(B-\lambda I_4)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ (1,5 bodu) zapsanou jako $\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ a převedenou na tvar $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

Řešením je podprostor vlastních hodnot $Ker(B-\lambda I_4)=[(0,1,0,0)^T,(0,0,0,1)^T]$. Skutečně platí $B\cdot(0,1,0,0)^T=2\cdot(0,1,0,0)^T$ a $B\cdot(0,0,0,1)^T=2\cdot(0,0,0,1)^T$.

Odtud vidíme, že budeme mít dva Jordanovy bloky (buď oba typu 2x2 nebo jeden typu 1x1 a druhý typu 3x3).

Spočtěme si matici $(B-\lambda I_4)^2=\mathbf{0}_{4\times 4}$. Je tedy $Ker(B-\lambda I_4)^2=[(0,1,0,0)^T,(0,0,0,1)^T,(1,0,0,0)^T,(0,0,1,0)^T]$. Poslední dva vektory rozšířily bázi $Ker(B-\lambda I_4)$ na bázi $Ker(B-\lambda I_4)^2$, začnou z nich tedy Jordanovy řetězce délky 2. Obdržíme odtud 2 Jordanovy řetězce (1 bod)

$$(1,0,0,0)^T,(B-\lambda I_4)\cdot(1,0,0,0)^T=(0,0,0,1)^T$$

a

$$(0,0,1,0)^T,(B-\lambda I_4)\cdot(0,0,1,0)^T=(0,1,0,0)^T$$

Zároveň vidíme, že nutně budeme mít dva Jordanovy bloky typu 2x2, tedy Jordanův kanonický tvar J matice B bude matice (0.5 bodu)

$$J=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

Příslušná Jordanova báze bude (obrátíme řetězce) pak

$$(0,0,0,1)^T,(1,0,0,0)^T,(0,1,0,0)^T,(0,0,1,0)^T.$$

Matice P bude tvaru (0.5 bodu včetně zkoušky)

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Zkouška:

$$B\cdot P=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\1&0&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\\2&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$P\cdot J=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\\2&1&0&0\end{pmatrix}.$$

3. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ mějme afinní podprostor ρ generovaný jako afinní obal bodů $A=(1,1,1,1)^T$, $B=(2,0,1,3)^T$, $C=(3,2,0,1)^T$ a afinní podprostor σ generovaný jako afinní obal bodů $D=(0,-2,-2,1)^T$, $E=(2,-1,-3,\ 1)^T$, $F=(0,-1,-1,1)^T$. Určete dimenze, průnik zaměření a vzájemnou polohu afinních podprostorů ρ a σ. Řešení doprovoďte slovním komentářem. *(4 body)*

Položme $\mathbf{u}_1=B-A=(1,-1,0,2)^T,\mathbf{u}_2=C-A=(2,1,-1,0)^T$ a $\mathbf{v}_1=E-D=(2,1,-1,0)^T,\mathbf{v}_2=F-D=(0,1,1,0)^T$. Společný průnik ρ a σ najdeme vyřešením rovnice

$$A+s\mathbf{u}_1+t\mathbf{u}_2=D+p\mathbf{v}_1+q\mathbf{v}_2,\ \text{tj.}$$

$$s\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2 - p\mathbf{v}_1 - q\mathbf{v}_2 = D - A.$$

Rovnici si převedeme na následující maticový tvar a vyřešíme.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Je tedy naše rovnice neřešitelná a tedy $\rho \cap \sigma = \emptyset$ (1 bod). Zároveň vidíme, že $\operatorname{Dir}\rho \cap \operatorname{Dir}\sigma = [(2, 1, -1, 0)^T]$ (1 bod) a $\dim \rho = \dim \sigma = 2$ (1 bod). Tedy ρ a σ jsou částečně rovnoběžné (1 bod). Akceptuji i odpověď, že jsou mimoběžné.