

M6201 Příklady - fold bifurkace

Lenka Příbylová

pribylova@math.muni.cz

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

14. března 2022

Příklad

Nalezněte limitní body (body fold bifurkace) parametrické rovnice

$$\dot{x} = 1 + \alpha x - x^3, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ověřte podmínky nedegenerovanosti a transversality fold bifurkace. Podle znaménka $f_\alpha(x^*, \alpha^*)$ a $f_{xx}(x^*, \alpha^*)$ klasifikujte limitní bod. Nakreslete bifurkační diagram.

Rovnováha splňuje $1 + \alpha x - x^3 = 0$, mohou být tedy až tři.

Rovnováha splňuje $1 + \alpha x - x^3 = 0$, mohou být tedy až tři. Limitní bod větve rovnováh splňuje $\alpha - 3x^2 = 0$. Protože rovnováha nemůže být nulová, je tato rovnice ekvivalentní rovnici $\alpha x - 3x^3 = 0$.

Rovnováha splňuje $1 + \alpha x - x^3 = 0$, mohou být tedy až tři. Limitní bod větve rovnováh splňuje $\alpha - 3x^2 = 0$. Protože rovnováha nemůže být nulová, je tato rovnice ekvivalentní rovnici $\alpha x - 3x^3 = 0$.

Odečtením

$$\begin{aligned}1 + \alpha x - x^3 &= 0, \\ \alpha x - 3x^3 &= 0\end{aligned}$$

dostáváme $1 + 2x^3 = 0$, tedy $x^* = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx -0,8$ pro kritickou hodnotu $\alpha^* = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} \approx 1,9$.

Rovnováha splňuje $1 + \alpha x - x^3 = 0$, mohou být tedy až tři. Limitní bod větve rovnováh splňuje $\alpha - 3x^2 = 0$. Protože rovnováha nemůže být nulová, je tato rovnice ekvivalentní rovnici $\alpha x - 3x^3 = 0$.

Odečtením

$$\begin{aligned} 1 + \alpha x - x^3 &= 0, \\ \alpha x - 3x^3 &= 0 \end{aligned}$$

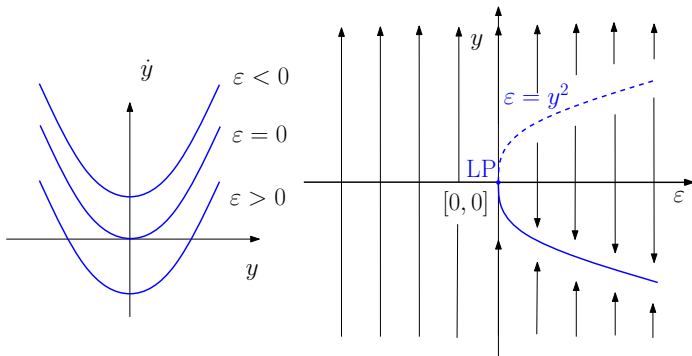
dostáváme $1 + 2x^3 = 0$, tedy $x^* = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx -0,8$ pro kritickou hodnotu $\alpha^* = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} \approx 1,9$. Podmínka nedegenerovanosti je

$f_{xx}(x^*, \alpha^*) = -6x^* > 0$ a podmínka transversality je $f_{\alpha}(x^*, \alpha^*) = x^* < 0$.

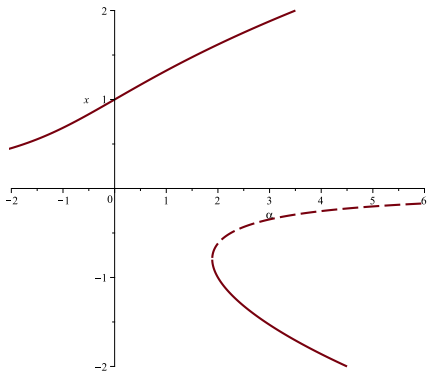
V okolí fold bifurkace bude tedy dynamika rovnice lokálně topologicky ekvivalentní rovnici

$$\dot{y} = -\varepsilon + y^2,$$

jejíž bifurkační diagram je



Pokud zakreslíme větve rovnováh v závislosti na parametru α , (můžeme udělat průběh funkce $\alpha = \frac{x^3-1}{x}$), dostaneme



Vidíme limitní bod $[1, 9, -0, 8]$. Spodní větev rovnováh je podle věty o normální formě fold bifurkace stabilní, ohýbá se do nestabilní větve uprostřed. Grobmanova–Hartmanova nebo Ljapunovova věta implikuje stabilitu horní větve, protože pro záporné hodnoty α je

$$f_x(x^*, \alpha^*) = \alpha - 3x^{*2} < 0.$$

Příklad

Nalezněte limitní body (body fold bifurkace) parametrické rovnice

$$\dot{x} = \alpha + 3x - x^3, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ověřte podmínky nedegenerovanosti a transversality fold bifurkace. Podle znaménka $f_\alpha(x^*, \alpha^*)$ a $f_{xx}(x^*, \alpha^*)$ klasifikujte limitní bod. Nakreslete bifurkační diagram.

Příklad

Ukažte, že v parametrickém systému

$$\dot{x} = x - y + 1$$

$$\dot{y} = y^2 - 2x - \varepsilon$$

dochází k bifurkaci sedlo-uzel, najděte kritickou hodnotu parametru ε a nakreslete bifurkační diagram.

Příklad

Ukažte, že v parametrickém systému

$$\dot{x} = x - y + 1$$

$$\dot{y} = y^2 - 2x - \varepsilon$$

dochází k bifurkaci sedlo-uzel, najděte kritickou hodnotu parametru ε a nakreslete bifurkační diagram.

Řešení:

Rovnováha splňuje $y^2 - 2(y - 1) - \varepsilon = 0$, tj. $y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}$

Příklad

Ukažte, že v parametrickém systému

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y + 1 \\ \dot{y} &= y^2 - 2x - \varepsilon\end{aligned}$$

dochází k bifurkaci sedlo-uzel, najděte kritickou hodnotu parametru ε a nakreslete bifurkační diagram.

Řešení:

Rovnováha splňuje $y^2 - 2(y - 1) - \varepsilon = 0$, tj. $y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}$

pro $\varepsilon_0 = 1$ je rovnováha $[0, 1]$ limitní,

pro $\varepsilon < 1$ rovnovážné body nejsou

pro $\varepsilon > 1$ jsou dvě rovnováhy $[\pm\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}]$.

Jacobiho matice má tvar $D\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2y \end{pmatrix}$,

Jacobiho matice má tvar $D\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2y \end{pmatrix}$,

v rovnováhách $[\pm\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}]$ tedy platí

$$\mathbf{J} = D\mathbf{f}(\pm\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2(1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}) \end{pmatrix}.$$

Jacobiho matice má tvar $D\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2y \end{pmatrix}$,

v rovnováhách $[\pm\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}]$ tedy platí

$$\mathbf{J} = D\mathbf{f}(\pm\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2(1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}) \end{pmatrix}.$$

$$\det \mathbf{J} = \pm 2\sqrt{\varepsilon - 1} = \lambda_1 \lambda_2$$

Jacobiho matice má tvar $D\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2y \end{pmatrix}$,

v rovnováhách $[\pm\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}]$ tedy platí

$$\mathbf{J} = D\mathbf{f}(\pm\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2(1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}) \end{pmatrix}.$$

$$\det \mathbf{J} = \pm 2\sqrt{\varepsilon - 1} = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{J} = 3 \pm 2\sqrt{\varepsilon - 1} = \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \text{ pro } \varepsilon > 1 \text{ v okolí } 1.$$

Jacobiho matice má tvar $Df(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2y \end{pmatrix}$,

v rovnováhách $[\pm\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}]$ tedy platí

$$J = Df(\pm\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2(1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}) \end{pmatrix}.$$

$$\det J = \pm 2\sqrt{\varepsilon - 1} = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\operatorname{tr} J = 3 \pm 2\sqrt{\varepsilon - 1} = \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \text{ pro } \varepsilon > 1 \text{ v okolí } 1.$$

Bod $[\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 + \sqrt{\varepsilon - 1}]$ je tedy nestabilní uzel
a bod $[-\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 - \sqrt{\varepsilon - 1}]$ sedlo.

Jacobiho matice má tvar $D\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2y \end{pmatrix}$,

v rovnováhách $[\pm\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}]$ tedy platí

$$\mathbf{J} = D\mathbf{f}(\pm\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2(1 \pm \sqrt{\varepsilon - 1}) \end{pmatrix}.$$

$$\det \mathbf{J} = \pm 2\sqrt{\varepsilon - 1} = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{J} = 3 \pm 2\sqrt{\varepsilon - 1} = \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \text{ pro } \varepsilon > 1 \text{ v okolí } 1.$$

Bod $[\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 + \sqrt{\varepsilon - 1}]$ je tedy nestabilní uzel
a bod $[-\sqrt{\varepsilon - 1}, 1 - \sqrt{\varepsilon - 1}]$ sedlo.

V kritické hodnotě parametru $\varepsilon_0 = 1$ dochází k bifurkaci typu sedlo-uzel.

Příklad

Výpočtem na papíře, analyticky v programu Maple a numericky v MatContu nalezněte bod limitní bod systému

$$x' = y$$

$$y' = -a - x + x^2 - xy.$$

Nalezněte vlastní čísla v limitním bodě (x^, y^*, a^*) a ukažte, že determinant Jacobiho matice zadaného systému je v limitním bodě nulový. Zkoumejte fázové portréty v programu XPPAUT.*