M6201 Příklady - transkritická a vidličková bifurkace

Lenka Přibylová
pribylova@math.muni.cz

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

7. března 2020

Příklad

Nalezněte bifurkační body parametrické rovnice

$$\dot{x} = -x^4 + x^3 - x^2 + (a+1)x - a, \quad x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}.$$

Ověřte podmínky nedegenerovanosti a transverzality a klasifikujte typ bifurkace. Nakreslete bifurkační diagram.

Rovnováha splňuje

$$-x^4 + x^3 - x^2 + (a+1)x - a = 0,$$

mohou být tedy až čtyři.

Rovnováha splňuje

$$-x^4 + x^3 - x^2 + (a+1)x - a = 0,$$

mohou být tedy až čtyři.

Kritické body bifurkace větve rovnováh splňují
$-4x^3 + 3x^2 - 2x + a + 1 = 0$, tedy

$$a = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1.$$

Rovnováha splňuje

$$-x^4 + x^3 - x^2 + (a+1)x - a = 0,$$

mohou být tedy až čtyři.

Kritické body bifurkace větve rovnováh splňují
$-4x^3 + 3x^2 - 2x + a + 1 = 0$, tedy

$$a = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1.$$

Dosazením dostaneme po úpravě

$$3x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Hornerovým schématem nebo numericky dostáváme jediný dvojnásobný kořen $x^* = 1$ pro kritickou hodnotu $a^* = 2$.

Podmínka nedegenerovanosti je

$$f_{xx}(x^*, a^*) = -12 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 2 = -8 < 0.$$

Podmínka nedegenerovanosti je

$$f_{xx}(x^*, a^*) = -12 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 2 = -8 < 0.$$

Nejde o fold bifurkaci, protože podmínka transversality není splněna:

$$f_a(x^*, a^*) = x^* - 1 = 0.$$

Podmínka nedegenerovanosti je

$$f_{xx}\left(x^*, a^*\right) = -12 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 2 = -8 < 0.$$

Nejde o fold bifurkaci, protože podmínka transversality není splněna:

$$f_a\left(x^*, a^*\right) = x^* - 1 = 0.$$

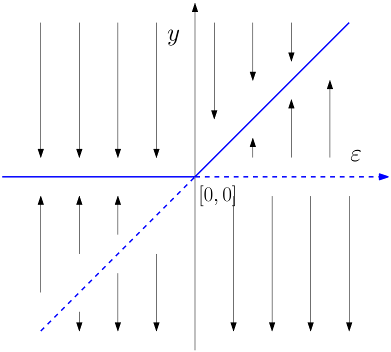
Je splněna podmínka transversality transkritické bifurkace, protože

$$f_{xa}\left(x^*, a^*\right) = 1 > 0.$$

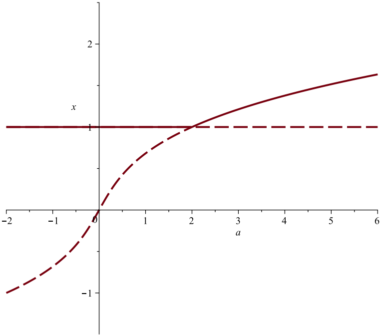
V okolí transkritické bifurkace bude tedy dynamika rovnice lokálně topologicky ekvivalentní rovnici

$$\dot{y} = \varepsilon y - y^2,$$

jejíž bifurkační diagram je



Pokud si uvědomíme, že
$-x^4 + x^3 - x^2 + (a+1)x - a = (-x^3 + a - x)(x-1)$, je vidět, že větve rovnováh v závislosti na parametru a se opravdu protínají v bodě $x^* = 1$ pro kritickou hodnotu $a^* = 2$.



Stabilita je určena typem transkritické bifurkace, tj. spodní větve jsou nestabilní a horní stabilní. Pro $a^* = 2$ je rovnováha semistabilní. Řešení $\dot{x} = (-x^3 + 2 - x)(x-1)$ kromě $x(t) \equiv 1$ vždy klesá.

Příklad

Nalezněte bifurkační body parametrické rovnice

$$\dot{x} = a^2 x + x^3 - x, \quad x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}.$$

Ověřte podmínky nedegenerovanosti a transverzality a klasifikujte typ bifurkace. Nakreslete bifurkační diagram.

Rovnováha splňuje

$$a^2x + x^3 - x = 0,$$

mohou být tedy až tři.

Rovnováha splňuje

$$a^2x + x^3 - x = 0,$$

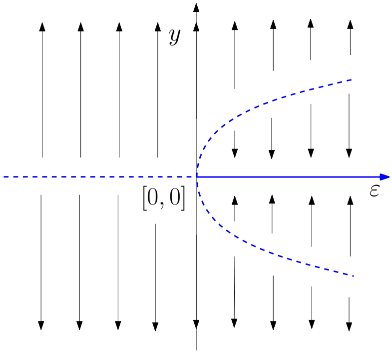
mohou být tedy až tři.

Kritické body bifurkace větve rovnováh splňují $a^2 + 3x^2 - 1 = 0$, což implikuje $x^* = 0$ a $a^* = \pm 1$. Pravá strana $a^2x + x^3 - x$ jako funkce x je lichá. Podmínka nedegenerovanosti platí $f_{xxx}(x^*, a^*) = 6 > 0$ a $f_{xa}(x^*, a^*) = 2a^* = \pm 2$. Jde o dvě vidličkové bifurkace.

V okolí vidličkové bifurkace v počátku pro $a^* = -1$ bude dynamika rovnice lokálně topologicky ekvivalentní rovnici

$$\dot{y} = -\varepsilon y + y^3,$$

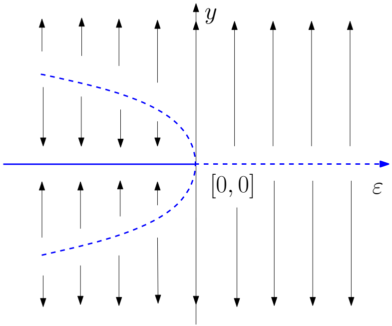
jejíž bifurkační diagram je



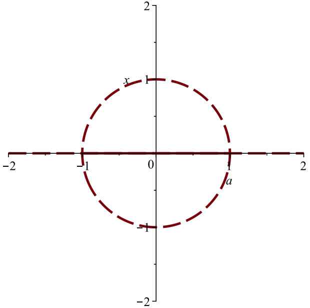
V okolí vidličkové bifurkace v počátku pro $a^* = 1$ bude dynamika rovnice lokálně topologicky ekvivalentní rovnici

$$\dot{y} = \varepsilon y + y^3,$$

jejíž bifurkační diagram je



Pokud si uvědomíme, že $a^2x + x^3 - x = x(a^2 + x^2 - 1)$, je vidět, že větve rovnováh v závislosti na parametru a se opravdu protínají v bodech $x^* = 0$ pro kritické hodnoty $a^* = \pm 1$.



Stabilita je určena typem vidličkových bifurkací, tj. pouze vnitřní větev $x = 0$ uvnitř kruhu je stabilní.