M6201 Příklad Poincarého zobrazení

Lenka Přibylová
pribylova@math.muni.cz

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

5. dubna 2020

Příklad

Nalezněte Poincarého zobrazení pro systém v polárních souřadnicích

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1-r^2)\\ \dot{\theta} &= 1\end{aligned}$$

Systém má v počátku nestabilní rovnováhu a stabilní invariantní množinu – cyklus, kterou je kružnice o poloměru 1.

Systém má v počátku nestabilní rovnováhu a stabilní invariantní množinu – cyklus, kterou je kružnice o poloměru 1.

Uvažujme libovolný bod $B = [r_0, \theta_0]$ kromě počátku a veďme tímto bodem z počátku O polopřímku OB. Tato polopřímka nemůže být tečná k trajektorii procházející bodem B, protože OB svírá s horizontální osou úhel θ_0 a $\dot{\theta}(r_0, \theta_0) = 1 \neq 0$. Polopřímka OB je Poincarého řezem trajektorie systému v bodě B.

Systém má v počátku nestabilní rovnováhu a stabilní invariantní množinu – cyklus, kterou je kružnice o poloměru 1.

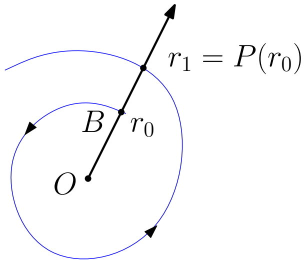
Uvažujme libovolný bod $B = [r_0, \theta_0]$ kromě počátku a veďme tímto bodem z počátku O polopřímku OB. Tato polopřímka nemůže být tečná k trajektorii procházející bodem B, protože OB svírá s horizontální osou úhel θ_0 a $\dot{\theta}(r_0, \theta_0) = 1 \neq 0$. Polopřímka OB je Poincarého řezem trajektorie systému v bodě B.

Definujme Poincarého zobrazení libovolného bodu na OB ve vzdálenosti r od počátku jako vzdálenost $P(r)$ od počátku pro následující protnutí OB trajektorií z bodu $[r, \theta_0]$.

Trajektorie z libovolného bodu $B = [r_0, \theta_0]$ kromě počátku tak pro tento bod definuje diskrétní systém

$$r_{n+1} = P(r_n),$$

s počáteční vzdáleností r_0.



$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = r(1 - r^2)$$

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{\mathrm{d}r}{r(1-r^2)} = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi$$

$$= \left[\ln \frac{r}{\sqrt{|r^2-1|}}\right]_{r_0}^{r_1} = \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\sqrt{\frac{r_0^2-1}{r_1^2-1}}\right)$$

$$\frac{dr}{dt} = r(1-r^2)$$

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r(1-r^2)} = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} dt = 2\pi$$

$$= \left[\ln \frac{r}{\sqrt{|r^2-1|}}\right]_{r_0}^{r_1} = \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\sqrt{\frac{r_0^2-1}{r_1^2-1}}\right)$$

a po úpravě dostaneme

$$r_1 = P(r_0) = \left(1 + e^{-4\pi}(r_0^{-2} - 1)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Poincarého zobrazení je dáno předpisem

$$P(r) = \left(1 + e^{-4\pi}(r^{-2} - 1)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

a jeho rovnováha $r^* = 1$ stabilní, protože $P'(1) = e^{-4\pi} < 1$.