

MODEL SOUSTAVY VELKÝCH KANADSKÝCH JEZER

ROBERT MAŘÍK

1. ZÁKLADNÍ MODEL SAMOČIŠTĚNÍ

Necht' veličina $x(t)$ udává hmotnost populace částic, které znečišťují vodu v jezeře o objemu V . Předpokládejme, že do jezera přitéká čistá voda a stejnou rychlostí odtéká voda s nečistotami (hladina se nemění, je v ustáleném stavu). Necht' veličina r udává, jaký objem vody se v jezeře takto vymění za jeden den. Předpokládejme dále (poněkud nerealisticky), že rozdělení znečišťujících částic v jezeře je rovnoměrné.

Úbytek hmotnosti nečistot za časovou jednotku je dán derivací x' , kde čárka značí derivaci podle času t .

Tento úbytek hmotnosti je možno vyjádřit též ve tvaru $\frac{r}{V}x$, kde $\frac{r}{V}$ je pro dané jezero kladná konstanta udávající, jak velká část z celkového množství vody se v jezeře vymění za časovou jednotku. Označíme-li tuto konstantu symbolem k , je proces úbytku nečistot v jezeře popsán diferenciální rovnicí

$$(1.1) \quad x' = -kx.$$

Znaménko „-“ vyjadřuje, že intenzita znečištění v jezeře klesá.

Předpokládejme nyní, že do jezera neustále přitékají další nečistoty rychlostí c . Rovnici (1.1) je potom nutno modifikovat na rovnici

$$(1.2) \quad x' = -kx + c.$$

Veličinu c zpravidla vypočteme jako součin koncentrace nečistot v přítoku a vydatnosti přítoku.

2. MODEL SOUSTAVY DVOU JEZER

Uvažujme nyní soustavu dvou znečištěných jezer. Do prvního jezera o objemu V_1 vtéká voda rychlostí f_1 , s koncentrací nečistot p_1 a vytéká stejnou rychlostí voda znečištěná. Tato znečištěná voda vtéká (rychlostí $f_{12} = f_1$) do druhého jezera o objemu V_2 a rychlostí f vytéká z celé soustavy jezer voda obsahující nečistoty z obou jezer. Druhé jezero má navíc přítok vydatnosti f_2 s koncentrací znečištění p_2 . Označme

$x_1(t)$ množství nečistot v čase t v prvním jezeře a $x_2(t)$ množství nečistot v čase t v druhém jezeře. Soustavu je možno popsat matematickým modelem

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x_1' &= f_1 p_1 - \frac{f_{12}}{V_1} x_1, \\ x_2' &= f_2 p_2 + \frac{f_{12}}{V_1} x_1 - \frac{f}{V_2} x_2. \end{aligned}$$

3. PĚT KANADSKÝCH JEZER

Označme indexy pět velkých kanadských jezer, jak je uvedeno v tabulce.

index i	jezero	objem V_i [míle ³]	přítok f_i [míle ³ /rok]
1	Hořejší	2900	15
2	Michiganské	1180	38
3	Hurónké	850	15
4	Erijské	116	17
5	Onatrio	393	14

Označme p_i množství nečistot v přítoku i -tého jezera. Dále označme f_{ij} roční tok mezi jezerem i a jezerem j v kubických mílech za rok. Platí $f_{13} = 15$, $f_{23} = 38$, $f_{34} = 68$, $f_{45} = 85$ a $f_{56} = 99$, kde f_{56} je roční odtok ze soustavy jezer.

Označme x_i míru znečištění i -tého jezera. Soustava popisující vývoj systém má tvar (porovnejte s mapkou jezerního systému a s modelem dvou jezer)

$$\begin{aligned} x_1' &= p_1 f_1 - \frac{f_{13}}{V_1} x_1 \\ x_2' &= p_2 f_2 - \frac{f_{23}}{V_2} x_2 \\ x_3' &= p_3 f_3 + \frac{f_{13}}{V_1} x_1 + \frac{f_{23}}{V_2} x_2 - \frac{f_{34}}{V_3} x_3 \\ x_4' &= p_4 f_4 + \frac{f_{34}}{V_3} x_3 - \frac{f_{45}}{V_4} x_4 \\ x_5' &= p_5 f_5 + \frac{f_{45}}{V_4} x_4 - \frac{f_{56}}{V_5} x_5 \end{aligned}$$

KAT. MATEMATIKY, FAKULTA LESNICKÁ A DŘEVAŘSKÁ, MENDELOVA ZEMĚDĚLSKÁ A LESNICKÁ UNIVERZITA V BRNĚ
E-mail address: marik@mendelu.cz
URL: www.mendelu.cz/user/marik