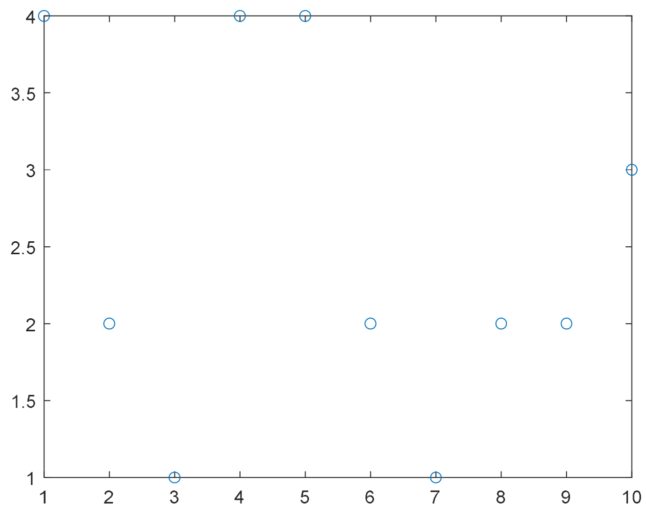
Cvičení 1.

Úkol 1.: Použijte funkci simulace_DNV.m pro příklad z přednášky (Opakovaně vypisovaných výběrových řízení se účastní vždy 4 firmy, označme je A, B, C, D. Pravděpodobnost, že jejich nabídky budou vybrány, jsou postupně 0,2; 0,3; 0,4 a 0,1.) Pro různá n (např. n = 10, 100, 200, 500, 1000, 2000) simulujte výsledky konkurzů. Pokaždé vytvořte tabulku rozložení četností variant 1, 2, 3, 4 (funkce tabulate) a sledujte, jak s rostoucím n se relativní četnosti přibližují k pravděpodobnostem těchto variant, tj. k číslům 0,2; 0,3; 0,4; 0,1.
Nepovinný úkol: Pokuste se výsledky znázornit graficky, tedy prostřednictvím čtyř grafů, kde na vodorovné ose bude n a na svislé ose relativní četnost příslušné varianty.

Ukázka postupu (pro n=10) a výstupy z MATLABu:

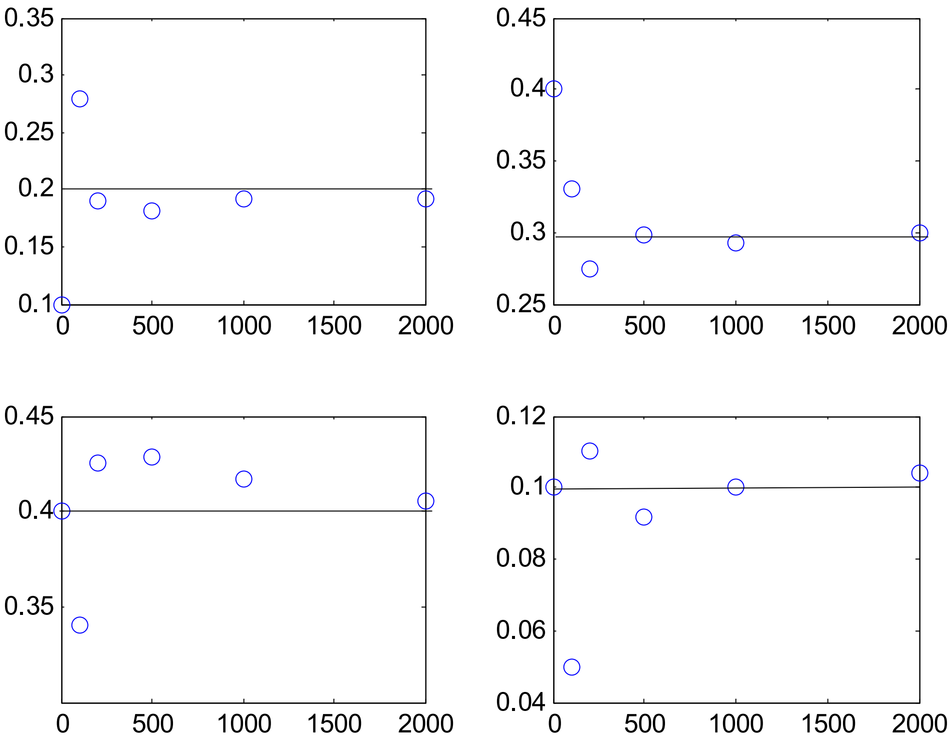
```
v=[0.2 0.3 0.4 0.1];
n=10;
 realizace=simulace_DNV(n,v)

realizace =

    4    2    1    4    4    2    1    2    2    3

tabulate(realizace)
  Value    Count   Percent
      1        2     20.00%
      2        4     40.00%
      3        1     10.00%
      4        3     30.00%
```



Pro tuto konkrétní simulaci existují pro některé firmy velké rozdíly mezi pravděpodobnostmi jednotlivých výsledků výběrových řízení a jejich relativními četnostmi:
pravděpodobnost, že bude vybrána firma A, je 0,2, a to se shoduje s relativní četností 0,2;
pravděpodobnost, že bude vybrána firma B, je 0,3, avšak relativní četnost vyšla 0,4;
pravděpodobnost, že bude vybrána firma C, je 0,4, relativní četnost je však 0,1;
pravděpodobnost, že bude vybrána firma D, je 0,1, což se velmi odlišuje od relativní četnosti 0,4.

Návod na nepovinný úkol:

```
v=[0.2 0.3 0.4 0.1];

n1=10;
realizace=simulace_DNV(n1,v);
tab=tabulate(realizace);
y1=tab(:,2)/n1;

n2=100;
realizace=simulace_DNV(n2,v);
tab=tabulate(realizace);
y2=tab(:,2)/n2;

n3=200;
realizace=simulace_DNV(n3,v);
tab=tabulate(realizace);
y3=tab(:,2)/n3;

n4=500;
realizace=simulace_DNV(n4,v);
tab=tabulate(realizace);
y4=tab(:,2)/n4;

n5=1000;
realizace=simulace_DNV(n5,v);
tab=tabulate(realizace);
y5=tab(:,2)/n5;

n6=2000;
realizace=simulace_DNV(n6,v);
tab=tabulate(realizace);
y6=tab(:,2)/n6;

n=[n1 n2 n3 n4 n5 n6]';
y=[y1 y2 y3 y4 y5 y6]‘;

subplot(2,2,1)
plot(n,y(1,:),'o')
subplot(2,2,2)
plot(n,y(2,:),'o')
subplot(2,2,3)
plot(n,y(3,:),'o')
subplot(2,2,4)
plot(n,y(4,:),'o')
```



Úkol 2.: Hráči šachu, označme je A a B, jsou stejně silní a hrají spolu tři partie. Nerozhodný výsledek partie je vyloučen a výsledky jsou nezávislé. Náhodná veličina X udává počet výher hráče A. Pomocí funkce simulace_DNV simulujte výsledky n-násobného opakování těchto tří partií (např. n = 20, 100, 200, 500). Pokaždé vytvořte tabulku rozložení četností variant 0,1,2,3 a získané relativní četnosti porovnejte s pravděpodobnostmi variant 0,1,2,3.
Návod: Vektor rozložení pravděpodobností diskrétní náhodné veličiny X lze získat pomocí funkce binopdf.

Ukázka postupu (pro n=20) a výstupy z MATLABu:

```
v=binopdf([0 1 2 3],3,0.5)

v =
    0.1250    0.3750    0.3750    0.1250

n=20;
realizace=simulace_DNV(n,v);
realizace=realizace-1
realizace =

  Columns 1 through 17

     1     2     2     1     0     1     1     1     2     0     1     2     0     3     2     1     2

  Columns 18 through 20

     1     1     3
```

tabulate(realizace)

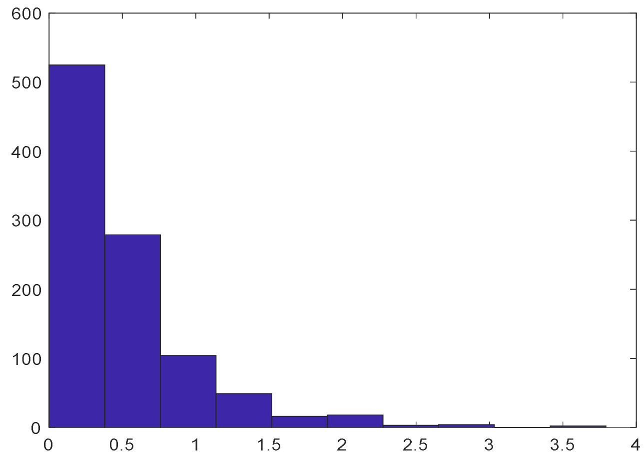
Value	Count	Percent
0	3	15.00%
1	9	45.00%
2	6	30.00%
3	2	10.00%

Vidíme, že pro tuto konkrétní simulaci existují určité rozdíly mezi pravděpodobnostmi a relativními četnostmi jednotlivých variant náhodné veličiny X: varianta 0 (tj. hráč A vůbec nevyhraje) má pravděpodobnost 0,125, zatímco relativní četnost je 0,15. Varianta 1 (tj. hráč A vyhraje jednou) má pravděpodobnost 0,375, relativní četnost je 0,45. Varianta 2 (tj. hráč A vyhraje dvakrát) má pravděpodobnost 0,375, relativní četnost je 0,3. Varianta 3 (tj. hráč A vyhraje třikrát) má pravděpodobnost 0,125, relativní četnost je 0,1.

Úkol 3.: Použijte funkci sim_expon.m pro různé hodnoty parametru lambda (např. lambda = 0,1; 0,5; 1; 2) a pro různá n (např. n = 10, 100, 200, 500, 1000, 2000). Pomocí funkce hist.m vykreslete (aspoň pro některé kombinace parametrů n, lambda) histogramy těchto realizací. Upozornění: V MATLABu lze realizace náhodné veličiny s exponenciálním rozložením generovat též pomocí funkce exprnd.

Ukázka postupu (pro lambda=2, n=1000) a výstupy z MATLABu:

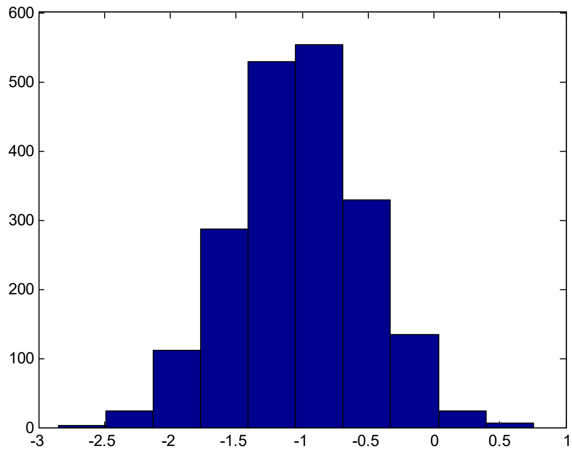
```
lambda=2;n=1000;
x=sim_expon(n,lambda);
hist(x)
```



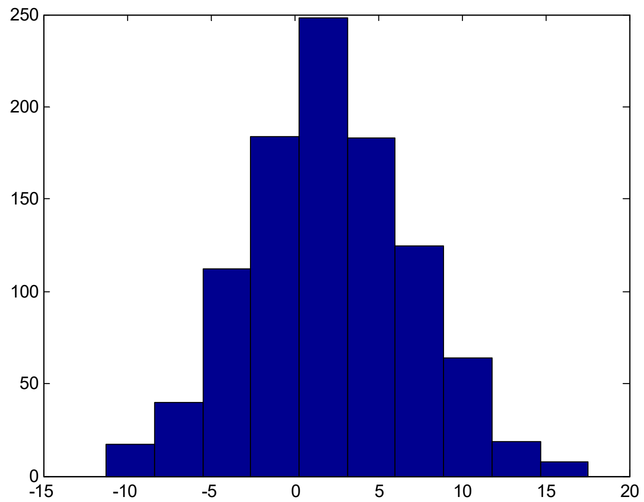
Úkol 4.: Pomocí funkcí clv.m, clv_polynom.m a BM_transformace.m generujte pro různé parametry mi, sigma a různá n realizace normálně rozložené náhodné veličiny. Vždy posuďte, zda vykreslený histogram se svým tvarem blíží tvaru Gaussovy křivky.

Ukázka postupu a výstupy z MATLABu:
Pro funkci clv:

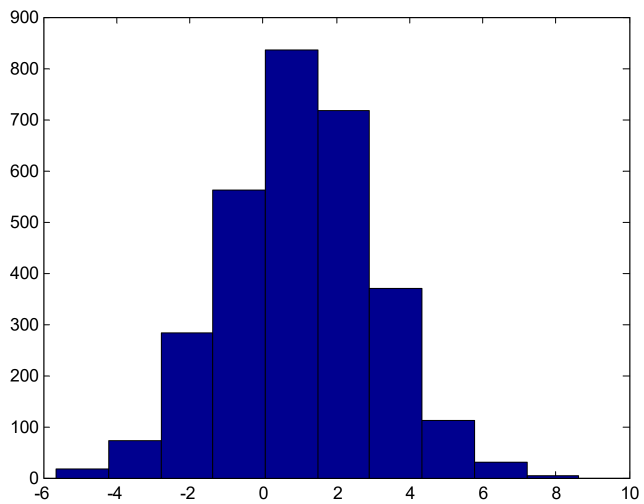
```
mi=-1;sigma=0.5;n=2000;
realizace=clv(mi,sigma,n);
```



Pro funkci clv_polynom:
mi=2;sigma=5;n=1000;
realizace=clv_polynom(mi,sigma,n);



Pro funkci BM_transformace:
mi=1;sigma=2;n=3000;
realizace=BM_transformace(mi,sigma,n);



Úkol 5.: Pro parametry mi = 0, sigma = 1, n = 1000 vygenerujte pomocí tří výše uvedených funkcí clv.m, clv_polynom.m a BM_transformace.m realizace normálně rozložené náhodné veličiny. Pokaždé vypočtěte průměr a směrodatnou odchylku a porovnejte s teoretickými hodnotami 0 a 1. Vypočítejte rovněž minimum a maximum.

Ukázka postupu a výstupy z MATLABu:

```
mi=0;sigma=1;n=1000;
realizace=clv(mi,sigma,n);
mean(realizace)
std(realizace)
min(realizace)
max(realizace)

realizace=clv_polynom(mi,sigma,n);
mean(realizace)
std(realizace)
min(realizace)
max(realizace)

realizace=BM_transformace(mi,sigma,n);
mean(realizace)
std(realizace)
min(realizace)
max(realizace)
```

Nepovinný úkol: Pro realizace získané v úkolu 4 vytvořte graf empirické distribuční funkce a porovnejte ho s grafem distribuční funkce rozložení N(0,1). Odlišnost empirické distribuční funkce od teoretické distribuční funkce posuďte pomocí součtu kvadrátů odchylek příslušných funkčních hodnot.

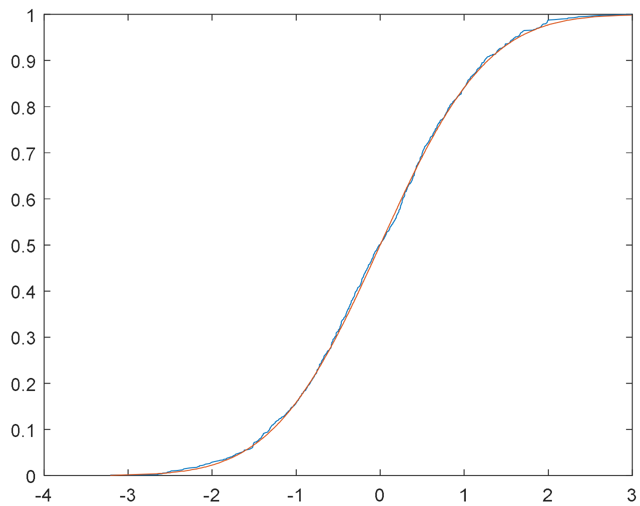
Návod:

Hodnoty proměnné realizace setřídíme vzestupně a uložíme do proměnné x: x=sort(realizace);

Do proměnné y1 uložíme hodnoty empirické distribuční funkce: y1=[1:n]'/n;

Do proměnné y2 uložíme hodnoty distribuční funkce rozložení N(0,1): y2=normcdf(x,0,1);

Do jednoho obrázku nakreslíme grafy obou funkcí: plot(x,y1,x,y2)



Součet kvadrátů odchylek vypočteme takto: (y1-y2)'*(y1-y2)

Úkol 6.: Podle některých teorií se soudí, že příjmy obyvatel lze modelovat pomocí exponenciálního rozložení. Nechť náhodná veličina X udává měsíční příjem náhodně vybraného zaměstnance. Předpokládejme, že X ~ Ex(λ). Podle údajů ČSÚ dosáhla průměrná hrubá mzda v ČR ve 3. čtvrtletí roku 2020 hodnoty 35 402 Kč, mediánová mzda byla 31 183 Kč.

a) Pomocí funkce sim_expon nebo exprnd náhodně vygenerujte příjmy n = 1000, 10 000 a 100 000 osob (střední hodnotu volte 35 402) a vytvořte histogram vygenerovaných příjmů.
V MATLABu: r = exprnd(35402,n,1); hist(r)

b) Pro každou sérii simulací vypočtěte průměrný příjem a vypočtěte medián příjmů. Zjištěné hodnoty porovnejte s teoretickými hodnotami: střední hodnota = 35 402 Kč, medián = 31 183 Kč.
Výpočet mediánu:

$$0{,}5 = \Phi(x_{0,5}) = 1 - e^{-\lambda x_{0,5}} \Rightarrow x_{0,5} = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-0{,}5) = \frac{\ln 2}{\lambda} = 35402 \cdot \ln 2 = 24539$$

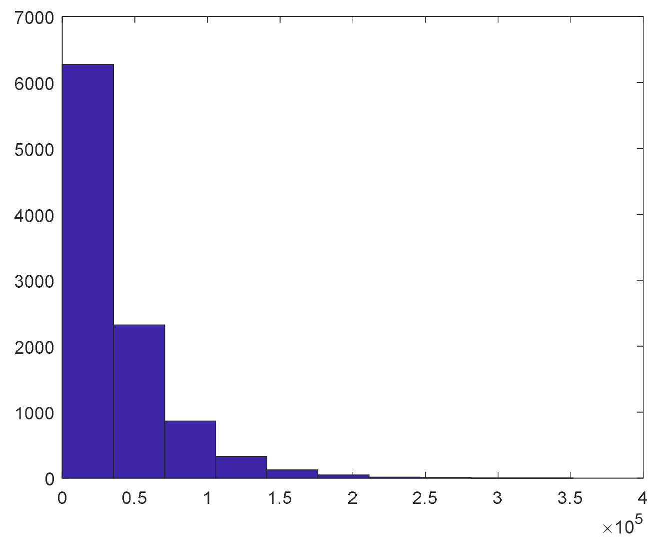
V MATLABu: m = mean(r)
x50 = median(r)

c) Pro každou sérii simulací zjistěte, kolik procent osob bude mít podprůměrné příjmy. Zjištěnou hodnotu porovnejte s teoretickou hodnotou 63,2 %.
Poznámka: Výpočet podílu osob s podprůměrnými příjmy:

$$P\left(X < \frac{1}{\lambda}\right) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - e^{-1} = 0{,}6321$$

V MATLABu:
pocet=sum(r<m);
procento=100*pocet/n

Ukázka postupu (pro n=10000 a výstupy z MATLABu:
n=10000;
r = exprnd(35402,n,1);
hist(r)



```
m =

   3.5793e+04

x50 = median(r)

x50 =

   2.4678e+04
pocet=sum(r<m);
procento=100*pocet/n

procento =

   63.4000
```

Vidíme, že vypočtený průměr je 35 793 Kč a od zadaného průměru 35 402 Kč se liší jen málo. Vypočtený medián je 24 678 Kč a od zadaného mediánu 31 183 Kč se liší značně. Vypočtené procento lidí s podprůměrnými příjmy je 63,4 % a od teoretické hodnoty 63,2 % se liší jen málo.