Cvičení 4.

Přehled vzorců

Pravděpodobnostní funkce: $\pi(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ pro x = 0, 1, 2, …, = 0 jinak

Střední hodnota E(X) = λ, rozptyl D(X) = λ.

Pokud X udává počet událostí, které nastanou v časovém intervalu délky t a střední hodnota počtu událostí v jednotkovém časovém intervalu je λ, pak X~ $Po(\lambda t)$.

Aproximace pravděpodobnostní funkce veličiny Y ~ Bi(n, ϑ) pravděpodobnostní funkcí veličiny X ~ Po(nϑ) (vyžaduje se splnění podmínek dobré aproximace: n > 30, $\vartheta \leq 0{,}1$):

$$P(Y = y) = \frac{(n\vartheta)^y}{y!} e^{-n\vartheta}$$

Vztah mezi Poissonovým a exponenciálním rozložením
Jestliže náhodná veličina X, která udává počet událostí za časovou jednotku, se řídí rozložením Po(λ), pak náhodná veličina Y, která udává dobu mezi dvěma po sobě následujícími událostmi, se řídí rozložením Ex(λ).

Meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro λ:

$d = m - \sqrt{\frac{m}{n}} u_{1-\alpha/2}$, $h = m + \sqrt{\frac{m}{n}} u_{1-\alpha/2}$ (při opravě na nespojitost od dolní meze odečteme 1/2n a k horní mezi přičteme 1/2n)

Meze 100(1-α)% empirického intervalu spolehlivosti pro λ:

$$d = \frac{1}{2n} \chi^2_{\alpha/2}(2nm),\ h = \frac{1}{2n} \chi^2_{1-\alpha/2}(2nm + 2)$$

Přehled matlabovských funkcí

Hodnota pravděpodobnostní funkce rozložení Po(λ) v bodě x … poisspdf(x, lambda)
Hodnota distribuční funkce rozložení Po(λ) v bodě x … poisscdf(x, lambda)
Generování náhodného čísla z Po(λ) … poissrnd(lambda)
Bodový a intervalový odhad parametru λ … poissfit(x), kde x je realizace náhodného výběru z Po(λ)

Příklad 1.: Při provozu balicího automatu vznikají během směny náhodné poruchy, které se řídí rozložením Po(2). Jaká je pravděpodobnost, že během směny dojde k aspoň jedné poruše?
Výsledek: 0,8647

Příklad 2.: Telefonní ústředna zapojí během hodiny průměrně 15 hovorů. Jaká je pravděpodobnost, že během 4 minut ústředna zapojí a) právě 1 hovor, b) aspoň 2 hovory?
Výsledky: a) 0,3679, b) 0,2642

Příklad 3.: Je známo, že počet tiskových chyb na libovolné stránce čtyřicetistránkového časopisu má rozložení Po(1,2). Jaká je pravděpodobnost, že
a) na 4. stránce časopisu je počet tiskových chyb menší než 3,
b) počet tiskových chyb v celém časopisu je aspoň 50?
Výsledky: a) 0,8795, b) 0,4054

Příklad 4.: Určitou prodejnu navštíví v průměru 15 zákazníků za hodinu. Prodavačka si potřebuje na 10 minut odskočit z obchodu. Jakou má pravděpodobnost, že během této doby nepřijde žádný zákazník? Úlohu řešte s využitím a) Poissonova rozložení, b) exponenciálního rozložení.
Výsledek: 0,0821

Příklad 5.: V dílně se vyrábějí hřebíky a jsou baleny do krabic po 200 kusech. Pravděpodobnost, že vyrobený hřebík je nestandardní, je 0,006. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybrané krabici jsou nejméně dva nestandardní hřebíky?
Výpočet proveďte a) přesně, b) aproximativně. Výsledky porovnejte.
Výsledky: a) 0,3376, b) 0,3374

Příklad 6.: Semena rostlin určitého druhu jsou znečištěna malým množstvím plevele. Je známo, že na jedné jednotce plochy vyrostou po osetí v průměru 4 rostliny plevele. Vypočítejte pravděpodobnost, že na dané jednotce plochy:
a) nebude žádný plevel,
b) vyrostou nejvýše 3 rostliny plevele,
c) vyroste aspoň 5, ale nejvýše 7 rostlin plevele.
Výsledky: a) 0,0183, b) 0,4335, c) 0,32

Příklad 7.: V prodejně posunuli zavírací dobu ve všední dny z 18 na 19 hodin. Sestrojte 90% asymptotický empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu zákazníků v této době, navštívilo-li prodejnu ve 30 náhodně zvolených dnech ve sledované době celkem 225 zákazníků. Přitom předpokládáme, že počet zákazníků v určitém časovém intervalu má Poissonovo rozložení.
Výsledek: $6{,}68 < \lambda < 8{,}32$ s pravděpodobností 0,9

Příklad 8.: U 32 náhodně vybraných tabulí hliníkového plechu určeného k pokrývání střech byly zjištěny tyto počty povrchových závad:

Počet závad	0	1	2	3	4	5	6
Počet tabulí	10	8	6	4	2	1	1

Předpokládáme, že počet povrchových závad připadajících na jednu tabuli hliníkového plechu se řídí Poissonovým rozložením
a) Jaká je pravděpodobnost, že u náhodně vybrané tabule se vyskytnou aspoň 3 povrchové závady?
b) Vypočtěte meze 95% asymptotického intervalu spolehlivosti (s opravou na nespojitost) pro střední hodnotu počtu povrchových závad připadajících na jednu tabuli hliníkového plechu.
c) Vypočtěte meze 95% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu počtu povrchových závad připadajících na jednu tabuli hliníkového plechu, nejprve podle vzorce, pak pomocí funkce poissfit.m
Výsledky: a) 0,215, b) $1{,}1407 < \lambda < 2{,}0468$ s pravděpodobností 0,9,
c) $1{,}1867 < \lambda < 2{,}0955$ s pravděpodobností 0,9

Příklad 9.: (Výhradně pro MATLAB)
Z dlouholetých záznamů o počtech porodů v jisté porodnici vyplývá, že průměrný počet porodů za den je 4,5. Lze předpokládat, že počet porodů za den se řídí Poissonovým rozložením. Pomocí MATLABu (funkce poissrnd.m) simulujte počty porodů v této porodnici za celý rok (365 dnů) a poté za 10 let. Poté porovnejte relativní četnost dnů se šesti porody s pravděpodobností tohoto jevu (p = 0,1281).