Cvičení 7.: Systémy hromadné obsluhy s neomezenou kapacitou

1. Systém M/M/1/∞/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $Ex(\mu)$, v systému je 1 linka obsluhy, kapacita systému je neomezená, frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen".

Podíl $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ se nazývá intenzita provozu. Systém se může stabilizovat, pokud $\rho < 1$.

Stacionární rozložení: $a_j = \rho^j(1-\rho)$, j = 0, 1, …, tedy $N \sim Ge(1-\rho)$.

Charakteristiky stabilizovaného systému: pravděpodobnost, že zákazník najde volnou linku $= 1-\frac{\lambda}{\mu}$, pravděpodobnost, že zákazník bude čekat ve frontě $= \frac{\lambda}{\mu}$, $E(N) = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$,

$$E(N_Q) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)},\ E(N_S) = \frac{\lambda}{\mu},\ E(W) = \frac{1}{\mu-\lambda},\ E(W_Q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)},\ E(W_S) = \frac{1}{\mu}$$

2. Systém M/M/1/∞/FIFO s netrpělivými zákazníky

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $Ex(\mu)$, v systému je 1 linka obsluhy, kapacita systému je neomezená, frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen". Přijde-li zákazník do systému, v němž je již n zákazníků, pak je ochoten čekat pouze s pravděpodobností b_n. Přitom $1 = b_0 \geq b_1 \geq \ldots \geq 0$.
Označme $c_0 = 1$, $c_j = b_1 b_2 \ldots b_{j-1}$, j = 1, 2, …

Stacionární rozložení: $a_j = c_j\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j a_0,\ j = 1, 2, \ldots,\ a_0 = \left[\sum_{j=0}^{\infty} c_j\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\right]^{-1}$

Charakteristiky stabilizovaného systému:

$$E(N) = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j,\ E(W) = \frac{E(N)}{\lambda}$$

3. Systém M/M/n/∞/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $Ex(\mu)$, v systému je n linek obsluhy, kapacita systému je neomezená, frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen".

Označme $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$. Podíl $\rho = \frac{\beta}{n}$ se nazývá intenzita provozu. Systém se může stabilizovat, pokud $\rho < 1$.

Stacionární rozložení: $a_j = \begin{cases} \frac{\beta^j}{j!} a_0 \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, n \\ \frac{\beta^j}{n!\, n^{j-n}} a_0 \text{ pro } j = n+1, n+2, \ldots \end{cases}$, kde $a_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n\beta^n}{n!(n-\beta)}\right]^{-1}$

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě: $P_Q = a_0 \frac{\beta^n}{n!(1-\rho)}$

Charakteristiky stabilizovaného systému:

Střední hodnota počtu zákazníků v systému: $E(N) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho} + n\rho$.

Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě: $E(N_Q) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho}$.

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků: $E(N_S) = n\rho$.

Střední hodnota doby strávené v systému: $E(W) = P_Q \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}$.

Střední hodnota doby strávené ve frontě: $E(W_Q) = P_Q \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$.

Střední hodnota doby strávené obsluhou: $E(W_S) = \frac{1}{\mu}$.

Využití systému: $\kappa = \rho$.

Příklad 1.: K ortopedovi přichází v průměru 16 pacientů za 8 h jeho pracovní doby. Pacient je v průměru ošetřen za 20 min. Předpokládáme, že vstupní proud pacientů je Poissonův proces a doba ošetření se řídí exponenciálním rozložením. Zjistěte, zda se systém může stabilizovat. Pokud ano, vypočtěte
a) využití ortopeda, b) pravděpodobnost, že pacient nebude čekat, c) střední hodnotu doby, kterou pacient stráví v systému, d) střední hodnotu počtu pacientů v systému.
Výsledky: Systém se může stabilizovat.

Ad a) Ortoped je využit na 66,6 %. Ad b) $a_0 = 1 - \rho = 0,\overline{3}$.
Ad c) E(W) = 1 h, $E(W_Q)$ = 40 min, $E(W_S)$ = 20 min
Ad d) E(N) = 2, $E(N_Q) = 1\frac{1}{3}$, $E(N_S) = \frac{2}{3}$

Příklad 2.: Do holičství přicházejí v průměru 3 zákazníci za 1 h a ostříhání jednoho zákazníka trvá v průměru 15 minut. Předpokládáme, že vstupní proud zákazníků je Poissonův proces a doba ostříhání se řídí exponenciálním rozložením. Přicházející zákazník je ochoten čekat s pravděpodobností 0,8 jen tehdy, když je v holičství pouze jeden zákazník. Je-li jich více, odchází bez obsloužení. Zjistěte, zda se provoz v holičství může stabilizovat. Pokud ano, a) vypočtěte a interpretujte stacionární rozložení. b) Jaká je střední hodnota doby, kterou zákazník stráví v holičství? c) Jak se změní tato střední hodnota, pokud by zákazník nesměl odejít bez obsloužení?
Výsledky: Systém se může stabilizovat.

$a_0 = \frac{20}{44}, a_1 = \frac{15}{44}, a_2 = \frac{9}{44}, E(W) = \frac{1}{4}\text{h}$, v systému, kde zákazník neodejde bez obsluhy, je E(W) = 1 h.

Příklad 3.: K poštovní přepážce přichází v průměru 15 klientů za 1 h. Průměrná doba obsluhy u přepážky činí 3 minuty. Předpokládáme, že doba mezi příchody zákazníků i doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením. Zjistěte, zda se provoz u poštovní přepážky může stabilizovat. Pokud ano, vyřešte tyto úlohy:
a) Jaká je pravděpodobnost, že klient bude muset čekat ve frontě?
b) Jaká je pravděpodobnost, že ve frontě budou více než 3 klienti?
c) Jaká je průměrná doba pobytu zákazníka na poště? (Výsledek udejte v minutách.)
Výsledky: Systém se může stabilizovat.

Ad a) Pravděpodobnost čekání = ρ = 0,75, ad b) $P(N > 3) = 0{,}3164$, ad c) $E(W) = 12\,\text{min}$

Příklad 4.: Cestovní kancelář se při zakládání pobočky rozhoduje, jak velkou kancelář si má pronajmout. Může si pronajmout velkou kancelář, ve které dokáže vyřídit požadavek 30 klientů za hodinu, střední, ve které vyřídí 20 požadavků za hodinu nebo malou, ve které zvládne pouze 15 požadavků za hodinu. Odhaduje, že bude potřeba vyřídit kolem 10 požadavků za hodinu. Jakou kancelář si má pronajmout, pokud ji chce mít co nejmenší, ale zároveň nechce, aby její klienti čekali ve frontě průměrně déle než 5 minut?
Výsledky: Ve všech třech případech se systém může stabilizovat.
Střední hodnota doba strávené ve frontě je pro velkou kancelář 1 minuta, pro střední 3 minuty a pro malou 8 minut. Cestovní kancelář by tedy měla zvolit středně velkou kancelář.

Příklad 5.: K benzínové stanici se dvěma čerpadly přijíždí každých 80 sekund jedno auto, přičemž průměrná doba čerpání je 2 min 30 s. Za předpokladu, že příjezdy aut tvoří Poissonův proces, doba čerpání se řídí exponenciálním rozložením a systém se může stabilizovat (ověřte!), vypočtěte

a) pravděpodobnost, že u čerpací stanice budou právě dvě auta
b) střední hodnotu počtu obsazených stojanů
c) střední hodnotu doby, kterou řidič stráví u čerpací stanice.

Výsledky: ad a) 0,0567, ad b) 1,875, ad c) 20 min 38 s
Návod na řešení pomocí MATLABu:
Použijeme funkci neomezeny_n.m
n=2;lambda=45;mi=24;
[a0,ro,PQ,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_n(n,lambda,mi)

Charakteristiky stabilizovaného systému s jednou linkou obsluhy poskytne funkce neomezeny_1.m

```
function[a0,ro,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_1(lambda,mi);
% [a0,ro,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_1(lambda,mi)
% Vypočítá prvek a0 stacionárního rozložení, intenzitu provozu
% a charakteristiky systému hromadné obsluhy M|M|1|Inf|FIFO.
```

Charakteristiky stabilizovaného systému s n linkami obsluhy poskytne funkce neomezeny_n.m

```
function[a0,ro,PQ,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_n(n,lambda,mi);
% [a0,ro,PQ,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_n(n,lambda,mi)
%
% Vypočítá prvek a0 stacionárního rozložení, intenzitu provozu
% a charakteristiky systému hromadné obsluhy M|M|n|Inf|FIFO.
%
% Vstupní parametry:
% n ......... počet linek obsluhy
% lambda .... parametr vstupního proudu
% mi ........ parametr obsluhy
%
% Výstupní parametry:
% a0 ........ pst, že v systému nebude žádný zákazník
% ro ........ intenzita provozu (využití systému)
% PQ ........ pst, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě
% ENS ....... střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků
% ENQ ....... střední hodnota počtu zákazníků ve frontě
% EN ........ střední hodnota počtu zákazníků v systému
% EWS ....... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví obsluhou
% EWQ ....... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví ve frontě
% EW ........ střední hodnota doby, kterou zákazník stráví v systému
```