

Autonomní systémy

Charakteristické směry

Petr Liška

Masarykova univerzita

22.03.2022

Shrnutí z minulého týdne

$$x' = f(x), \quad f \in C(D, \mathbb{R}^2), D \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ je otevřená} \quad (1)$$

1. Je-li trajektorie ohraničená pro $t \rightarrow \infty$, pak její ω -limitní množina obsahuje buď stacionární bod nebo cyklus.
2. Cyklus musí mít ve svém vnitřku stacionární bod.
3. Obsahuje-li ω -limitní množina stabilní uzel nebo ohnisko, pak obsahuje jen tento bod.
4. ω -limitní množina neobsahuje žádné nestabilní stacionární body.

Charakteristické směry

Uvažujme autonomní systém

$$\begin{aligned}x' &= P(x, y) \\y' &= Q(x, y)\end{aligned}\tag{2}$$

kde $P, Q \in C(D, \mathbb{R})$, kde D je otevřená množina, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $[0, 0] \in D$ a $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$.

Zavedením polárních souřadnic $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ dostaneme systém ve tvaru

Charakteristické směry

Uvažujme autonomní systém

$$\begin{aligned}x' &= P(x, y) \\y' &= Q(x, y)\end{aligned}\tag{2}$$

kde $P, Q \in C(D, \mathbb{R})$, kde D je otevřená množina, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $[0, 0] \in D$ a $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$.

Zavedením polárních souřadnic $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ dostaneme systém ve tvaru

$$\begin{aligned}r' &= P(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cos \varphi + Q(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sin \varphi \\r\varphi' &= Q(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cos \varphi - P(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sin \varphi\end{aligned}\tag{3}$$

Definice

Směr $\varphi = \varphi_0$ se nazývá *charakteristickým směrem* pro systém (2) jestliže existuje posloupnost (r_n, φ_n) taková, že

1.
$$0 < r_n \rightarrow 0, \varphi_n \rightarrow \varphi_0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty,$$

2.
$$(P(r_n \cos \varphi_n, r_n \sin \varphi_n), Q(r_n \cos \varphi_n, r_n \sin \varphi_n)) \neq 0 \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}$$

3. pro $n \rightarrow \infty$

$$\frac{Q(r_n \cos \varphi_n, r_n \sin \varphi_n) \cos \varphi_0 - P(r_n \cos \varphi_n, r_n \sin \varphi_n) \sin \varphi_0}{\sqrt{P^2(r_n \cos \varphi_n, r_n \sin \varphi_n) + Q^2(r_n \cos \varphi_n, r_n \sin \varphi_n)}} \rightarrow 0$$

Věta

Je-li $\psi(r)$ kladná a spojitá funkce pro $r > 0$ taková, že platí

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \psi(r) = 0$$

a limity

$$p(\varphi) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{P(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}{\psi(r)},$$

$$q(\varphi) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{Q(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}{\psi(r)}$$

existují stejnoměrně pro φ blízka φ_0 , přičemž $p^2(\varphi) + q^2(\varphi) \neq 0$, pak $\varphi = \varphi_0$ je charakteristickým směrem právě tehdy, když

$$q(\varphi_0) \cos \varphi_0 - p(\varphi_0) \sin \varphi_0 = 0.$$

Věta

Nechť $f, g \in C(D, \mathbb{R})$, kde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $[0, 0] \in D$. Bud' $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$ regulární konstantní matice. Předpokládejme, že

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x,y)| + |g(x,y)|}{|x| + |y|} = 0.$$

Pak ke každému charakteristickému směru φ_0 systému

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + f(x,y), \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + g(x,y) \end{aligned} \tag{4}$$

existuje reálný vlastní vektor matice A mající směr φ_0 a naopak směr φ_0 každého reálného vlastního vektoru matice A je charakteristickým směrem rovnice (4).

Důsledek

Předpokládejme, že funkce P , Q jsou spojité a mají spojité parciální derivace druhého řádu v okolí bodu $[x_0, y_0]$ a že $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

je regulární matice. Pak ke každému charakteristickému směru φ_0 systému

$$\begin{aligned} x' &= P(x, y), \\ y' &= Q(x, y) \end{aligned} \tag{5}$$

v bodě $[x_0, y_0]$ existuje reálný vlastní vektor matice A mající směr φ_0 a naopak směr φ_0 každého reálného vlastního vektoru matice A je charakteristickým směrem systému (5) v bodě $[x_0, y_0]$.