# Autonomní systémy

## Jak spočítat parametry?

Petr Liška

Masarykova univerzita

29.03.2022

# Richardsonova teorie konfliktů

$$x' = ky - \alpha x + g$$
$$y' = lx - \beta y + h$$

$$[x_0, y_0] = \left[\frac{kh + \beta g}{\alpha\beta - kl}, \frac{lg + \alpha h}{\alpha\beta - kl}\right]$$

$$\alpha\beta - kl > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{stabilní}$$
$$\alpha\beta - kl < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{nestabilní}$$

# První oprava

$$x = U - U_0, \qquad\qquad y = V - V_0$$

- $U$ je rozpočet Jedeslandu a $U_0$ je export z Jedeslandu do Anderslandu,
- $V$ je rozpočet Anderslandu a $V_0$ je export z Anderslandu do Jedeslandu.

# Hodnoty „nenávisti“

- $g$, $h$ se v podstatě nedají měřit,
- nejsou to ani spojité funkce,
- jsou ale přibližně konstantní v dlouhodobém horizontu.

# Odhady dle Richardsona - $\alpha, \beta$

- první pozorování – jednotky $\alpha$, $\beta$, $k$ a $l$ jsou $\left[\frac{1}{\text{čas}}\right]$,
- je-li $y = 0$ a $g = 0$ pak

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)x(t_0)}$$

a odtud

$$x(t_0 + \alpha^{-1}) = \frac{x(t_0)}{\mathrm{e}},$$

- $\alpha^{-1}$ je volební období parlamentu Jedeslandu (tj. $\alpha = 0{,}2$ pro Velkou Británii).

# Odhady dle Richardsona - $k$, $l$

- uvažme hypotetický případ, kdy $g = 0$ a $y = y_1$, tj.

$$x' = ky_1 - \alpha,$$

- je-li zároveň někdy $x = 0$, pak

$$\frac{1}{k} = \frac{y_1}{x'},$$

a odtud

$$x = ky_1 t \qquad \Longrightarrow \qquad x\left(\frac{1}{k}\right) = y_1$$

- vzhledem k situaci v letech 1933-1936 v Německu uvažujeme, že efekt $\alpha$ a $g$ se vynuluje a $k = 0{,}3$ pro Německo
- $k$ je přímo úměrné velikosti ekonomiky

# Situace před I. světovou válku a naše odhady

- Jedesland = Francie+Rusko
- Andersland = Německo + Rakousko–Uhersko
- $k = l = 0{,}9$
- $\alpha = \beta = 0{,}2$

$$\alpha\beta - kl = \alpha^2 - k^2 = -0{,}77$$

# Jak odhady korespondují s realitou?

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x+y) = (k-\alpha)(x+y) + g + h$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U+V) = (k-\alpha)\left\{U + V - \left[U_0 + V_0 - \frac{g+h}{k-\alpha} - \frac{1}{k-\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U_0+V_0)\right]\right\}$$

| | 1909 | 1910 | 1911 | 1912 | 1913 |
|---|---|---|---|---|---|
| Francie | 48,6 | 50,9 | 57,1 | 63,2 | 74,7 |
| Rusko | 66,7 | 68,5 | 70,7 | 81,8 | 92,0 |
| Německo | 63,1 | 62,0 | 62,5 | 68,2 | 95,4 |
| R–U | 20,8 | 23,4 | 24,6 | 25,5 | 26,9 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta(U+V)$ | 5,6 | 10,1 | 23,8 | 50,3 |
| $(U+V)$ | 202,0 | 209,8 | 226,8 | 263,8 |

$$\Delta(U+V) = 0{,}73(U+V+194)$$

# Lanchasterovy modely bitev

změna bojové síly = posily − operační ztráty − bojové ztráty

Konvenční boj:

$$x' = -ay + f(t)$$
$$y' = -bx + g(t)$$

Konvenční vs guerilla:

$$x' = -cxy + f(t)$$
$$y' = -dx + g(t)$$

# Bitva o Iwo Jimu 19.2.1945–26.3.1945

**Celkové ztráty Spojených států na ostrově Iwo Jima**

| | Mrtví a pohřešovaní | Zranění | Bojová únava | Celkem |
|---|---|---|---|---|
| Námořní pěchota | 5 931 | 17 272 | 2 648 | 25 851 |
| Námořní jednotky: | | | | |
| Lodě a letadla | 633 | 1 158 | | 1 791 |
| Zdravotní jednotky | 195 | 529 | | 724 |
| Seabees | 51 | 218 | | 37 |
| Doktoři a zubaři | 2 | 12 | | 14 |
| Armádní jednotky | 9 | 28 | | 37 |
| Celkem | 6 821 | 19 217 | 2 648 | 28 686 |

**Ztráty Japonska na ostrově Iwo Jima**

| Obranné jednotky (odhad) | | Zajatci | Mrtví |
|---|---|---|---|
| 21 000 | Námořní pěchota | 216 | 20 000 |
| | Armáda | 867 | |
| | Součet | 1 083 | |

$$
\begin{aligned}
x' &= -ay + f(t)\\
y' &= -bx
\end{aligned}
$$

$$
f(t) = \begin{cases}
54000 & 0 \le t < 1\\
0 & 1 \le t < 2\\
6000 & 2 \le t < 3\\
0 & 3 \le t < 5\\
13000 & 5 \le t < 6\\
0 & t \ge 6
\end{cases}
$$

$$
x(0) = 0, y(0) = 21500
$$

$$
x(t) = -\sqrt{\frac{a}{b}} y_0 \cosh \sqrt{ab} t + \int_0^t \cosh \sqrt{ab}(t-s) f(s) \,\mathrm{d}s
$$

$$
y(t) = y_0 \cosh \sqrt{ab} t - \sqrt{\frac{b}{a}} \int_0^t \sinh \sqrt{ab}(t-s) f(s) \,\mathrm{d}s
$$

# Výpočet parametru $b$

Integrováním druhé rovnice obdržíme

$$y(s) - y_0 = -b \int_0^s x(t)\,\mathrm{d}t$$

a odtud

$$b = \frac{y_0 - y(s)}{\int_0^s x(t)\,\mathrm{d}t} = \frac{y_0 - y(36)}{\int_0^{36} x(t)\,\mathrm{d}t} = \frac{21\,500}{\int_0^{36} x(t)\,\mathrm{d}t},$$

$$\int_0^{36} x(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{i=1}^{36} x(i) \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{21\,500}{2\,037\,000} = 0{,}0106\,.$$

# Výpočet parametru $a$

Integrováním první rovnice obdržíme

$$x(28) = -a\int_0^{28} y(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{28} f(t)\,\mathrm{d}t = -a\int_0^{28} y(t)\,\mathrm{d}t + 73\,000$$

a odtud

$$a = \frac{73\,000 - 52\,735}{\int_0^{28} y(t)} \approx \frac{73\,000 - 52\,735}{\sum_{j=1}^{28} y(j)}\,.$$

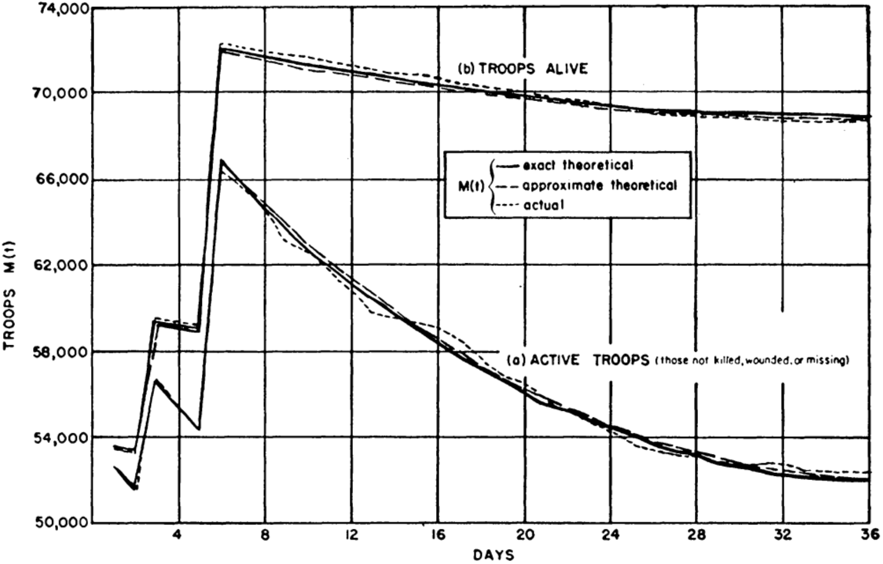
Neznámou funkci y aproximujeme

$$y(j) = y_0 - b\int_0^{j} x(t)\,\mathrm{d}t \approx 21\,500 - b\sum_{i=1}^{j} x(i)\,.$$

$$a = \frac{20\,265}{372\,500} = 0{,}0544\,.$$

Engel, J.H. A verification of Lanchaster's law, *Operations Research*, 2, 1954, 163–171.

# Porovnání s realitou



# Model konkurence dvou druhů

$$x' = (a - bx - cy)x$$
$$y' = (\alpha - \beta y - \gamma x)y$$

| | *saccharomyces* | Mixed Population | *schizosaccharomyces* | Mixed Population |
|---|---|---|---|---|
| Age in hours | Volume of yeast | Volume of yeast | Volume of yeast | Volume of yeast |
| 6 | 0.37 | 0.375 | - | 0.291 |
| 16 | 8.87 | 3.99 | 1.00 | 0.98 |
| 24 | 10.66 | 4.69 | - | 1.47 |
| 29 | 12.50 | 6.15 | 1.70 | 1.46 |
| 40 | 13.27 | - | - | - |
| 48 | 12.87 | 7.27 | 2.73 | 1.71 |
| 53 | 12.70 | 8.30 | - | 1.84 |
| 72 | - | - | 4.87 | - |
| 93 | - | - | 5.67 | - |
| 117 | - | - | 5.80 | - |
| 141 | - | - | 5.83 | - |
| 7.5 | 1.63 | 0.923 | - | 0.371 |
| 15.0 | 6.20 | 3.082 | 1.27 | 0.630 |
| 24.0 | 10.97 | 5.780 | - | 1.220 |
| 31.5 | 12.60 | 9.910 | 2.33 | 1.112 |
| 33.0 | 12.90 | 9.470 | - | 1.225 |
| 44.0 | 12.77 | 10.570 | - | 1.102 |
| 51.5 | 12.90 | 9.883 | 4.56 | 0.961 |