Weibel: Introduction to homological algebra

HOMOLOGICKÁ ALGEBRA

Řetězcové komplexy R-modulů

- R asociativní okruh, moduly buď pravé nebo levé
- Exaktní posloupnost R-modulů (v B) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ $\ker g = \operatorname{im} f$

$0 \to A \xrightarrow{f} B \Rightarrow f$ je prosté, $B \xrightarrow{g} C \to 0 \Rightarrow g$ je surjektivní

$C = \operatorname{coker} f$?

$0 \to A \xrightarrow[\cong]{f} B \to 0$

▸ krátká exaktní posloupnost: $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ exaktní ve všech členech

$\Rightarrow C \cong B/\ker g \cong B/\operatorname{im} f \cong B/A$

▸ dlouhá exaktní posloupnost: $C_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-2} \to$

exaktnost $\Rightarrow d_n \circ d_{n+1} = 0$

řetězcový komplex je posloupnost homomorfismů $d_n : C_n \to C_{n-1}$ R-modulů, $n \in \mathbb{Z}$, $d_n \circ d_{n+1} = 0$.

$C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1}$ $Z_n = \ker d_n$ **cykly** d_n **diferenciál** **hraniční operátor**

$B_n = \operatorname{im} d_{n+1}$ **hranice** $B_n \subseteq Z_n$

Homologické grupy řetězcového komplexu C_* jsou $H_n(C) = \dfrac{Z_n}{B_n} = \dfrac{\ker d_n}{\operatorname{im} d_{n+1}}$ měří míru neexaktnosti řetězcového komplexu.

$0 \to Z_n \hookrightarrow C_n \overset{d}{\twoheadrightarrow} B_{n-1} \to 0$

$0 \to B_n \hookrightarrow Z_n \twoheadrightarrow Z_n/B_n = H_n(C) \to 0$

Řetězcové komplexy pravých R-modulů tvoří kategorii Ch(mod-R)

Morfismy = řetězcové homomorfismy

posloupnost $\{f_n : C_n \to D_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ takových, že diagram

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
D_{n+1} \arrow[r, "d"] & D_n \arrow[r, "d"] & D_{n-1}
\end{tikzcd}$$

komutuje

$f_n(B_n(C_*)) \subseteq B_n(D_*)$

$f_n(Z_n(C_*)) \subseteq Z_n(D_*)$ Tedy f indukuje $f_* : H_n(C) \to H_n(D)$

$f_* : C_* \to D_*$ se nazývá **kvaziizomorfismus**, jestliže indukuje izo na všech homologických grupách

Acyklický komplex C_* je takový, že $H_n(C_*)=0$
což je ekvivalentní s tím, že
- C_* je exaktní $\Longleftrightarrow$ ↓
- $0 \to C$ je kvaziizomorfismus

(tj. $0 \to H_n(C)$ je izomorfismus $\Rightarrow H_n(C)=0$)

kořetězcový komplex:

označíme $C^n = C_{-n}$ potom zobr. $C_n \xrightarrow{d_n} C_{-n-1}$ ~~[illegible]~~ dá $C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1}$

$C^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1}$, $d^n \circ d^{n-1}=0$

∴ **kohraniční operátor** Z^n **kocykly**, B^n **kohranice**

Ohraničený řetězc. komplex C_* $C_n=0$ pro $n<a$ a $n>b$

ohraničený zdola a shora

(Př) X je simpliciální komplex

$C_n(X)$ je volný R-modul generovaný n-simplexy z X, $n \geq 0$

$C_n(X)=0$ pro $n<0$

Každý simplex je dán pořadím vrcholů

$d_n(A_0 A_1 \dots A_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i A_0 \dots \hat{A}_i \dots A_n$ $\qquad d_n \circ d_{n+1}=0$

Jeho homologie se nazývají simpliciální homologie X.

(Př) X je topologický prostor

Δ^n … standardní n-simplex, $\Delta^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

$\Delta^n = \{(t_0, t_1, \dots t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \sum t_i = 1, t_i \geq 0\}$

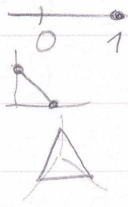
$\iota_i : \Delta^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n \qquad i=0,1,\dots n$

$(t_0, \dots, t_{n-1}) \longrightarrow (t_0, \dots, t_{i-1}, \underset{i\text{-té místo}}{0}, t_i, \dots t_{n-1})$

0-simplex

1-simplex

2-simplex



Singulární n-simplex

Spojité zobrazení $\varphi : \Delta^n \to X$

$S_n(X)$ je volný R-modul generovaný sing. n-simplexy

$d_n(\varphi) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\varphi \circ \iota_i) \in S_{n-1}(X) \qquad d_{n-1} \circ d_n = 0$

$\varphi \circ \iota_i : \Delta^{n-1} \xrightarrow{\iota_i} \Delta^n \xrightarrow{\varphi} X$

Toto je definice sing. řetězcového komplexu prostoru X, homologie tohoto řetězc. komplexu se nazývají singulární homologie top. prostoru X s koeficienty v R.

Snake-lemma:

Mějme komut. diagram R-modulů s exaktními řádky:

$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "f"] & B' \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "g"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "p"] & C &
\end{tikzcd}$$

. Pak existuje homomorfismus ∂ tak, že následující posloupnost je exaktní:

$$\ker f \xrightarrow{i'_*} \ker g \xrightarrow{p'_*} \ker h \xrightarrow[\text{svazující}]{\partial\ \text{homo}} \operatorname{coker} f \xrightarrow{i_*} \operatorname{coker} g \xrightarrow{p_*} \operatorname{coker} h$$

Dk: $c \in \ker h: \partial(c) = \underbrace{i^{-1} \circ g \circ (p')^{-1}}(c)$ jediná možná definice

tady můžeme mít víc možností, ale výsledek nezávisí na volbě → korektní

důkaz exaktnosti:

- $\partial \circ p'_* = 0$

Nechť $b \in \ker g$

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[d, mapsto] \\
p'(b) \arrow[d, mapsto, "(p')^{-1}"] \\
b \arrow[d, mapsto, "g"] \\
0
\end{tikzcd}$$

Nechť $c \in \ker h$

$$\begin{tikzcd}
c \\
b' \in B' \arrow[u, mapsto, "p'"] \\
g(b') \in B \\
a \in A \arrow[u, mapsto, "i"]
\end{tikzcd}$$

$\text{''} f(a') \quad a' \in A'$

$a' \longmapsto b'' \in B'$

$$\begin{tikzcd}
c \\
b' - b'' \in B \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$g(b') - g(b'')$

$\Downarrow$

$b' - b'' \in \ker g$

$p(b' - b'') = c$

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, "i'^*"] \arrow[d] & \ker g \arrow[r, "p'^*"] \arrow[d] & \ker h \arrow[d] \arrow[dddll, bend left, "\text{HAD } (=\partial)"] & \\
A' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "f"] & B' \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "g"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
A \arrow[r, "i"] \arrow[d] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d] & C \arrow[d] & \\
\operatorname{coker} f \arrow[r, "i^*"] & \operatorname{coker} g \arrow[r, "p^*"] & \operatorname{coker} h &
\end{tikzcd}$$

(0 → A vlevo od A)

5-lemma:

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r] \arrow[d, "a"] & B' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "b"] & C' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "c"] & D' \arrow[r] \arrow[d, "d"] & E' \arrow[d, "e"] \\
A \arrow[r] & B \arrow[r, "f"] & C \arrow[r, "g"] & D \arrow[r] & E
\end{tikzcd}$$

komutativní diagram s exaktními řádky

Jsou-li a,b,d,e izo, je $\underline{c}$ také izo

DÚ

a,b,d na a e prosté ⇒ c na

e,b,d prosté, a na ⇒ c prosté

Důkaz pomocí hada:

$$\begin{tikzcd}
\ker f' \arrow[r, tail] \arrow[d, "b'"] & C' \arrow[r, two heads, "g'"] \arrow[d, "c"] & \operatorname{im} g' \arrow[d, "d'"] \\
\ker f \arrow[r, tail] \arrow[d] & C \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d] & \operatorname{im} g \arrow[d] \\
\operatorname{coker} b' \arrow[r] & \operatorname{coker} c \arrow[r] & \operatorname{coker} d'
\end{tikzcd}$$

restrikce děčka

exaktní

K tomu, aby coker $c = 0$ stačí, aby coker $b' = 0$ a coker $d' = 0$ (podle Snake lemm

$\boxed{\text{VĚTA}}$ O dlouhé exaktní posloupnosti homologických grup

Nechť $0 \to A_* \xrightarrow{f} B_* \xrightarrow{g} C_* \to 0$ je krátká exaktní posloupnost řetězce komplexů. Pak existuje přirozený homomorf. (svazující homo) $\partial : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ tak, že posloupnost

$\to H_{n+1}(C) \xrightarrow{\partial} H_n(A) \xrightarrow{f} H_n(B) \xrightarrow{g} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A)$ je exaktní

Důkaz pomocí snake lemmatu:

$$\begin{tikzcd}
& \ker d_A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \ker d_B \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_C \arrow[d] \arrow[dddll, bend left, "\partial"] & \\
& \frac{A_n}{d(A_{n+1})} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_A"] & \frac{B_n}{d(B_{n+1})} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d_B"] & \frac{C_n}{d(C_{n+1})} \arrow[r] \arrow[d, "d_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & Z_{n-1}(B) \arrow[r] \arrow[d] & Z_{n-1}(C) \arrow[d] & \\
& \operatorname{coker} d_A & \operatorname{coker} d_B & \operatorname{coker} d_C &
\end{tikzcd}$$

exaktní (ukážeme)

exaktní

$$\ker d_A = \frac{Z_n(A)}{d(A_{n+1})} = H_n(A) \qquad \operatorname{coker} d_A = \frac{Z_{n-1}(A)}{d(A_n)} = H_{n-1}(A)$$

$c \in Z_n(C) \qquad \partial[c] = [f^{-1} d_B \, g^{-1}(c)]$

přirozenost ∂: z krátkého žebříku

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \circ \arrow[r] \arrow[d] & \circ \arrow[r] \arrow[d] & \circ \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dostaneme dlouhý

$\cdots =\!|\!=\!|\!=\!|\!=\!|\!=\!|\!= \cdots$

exaktnost za DÚ

Homotopie dvou řetězcových homomorfismů: $f, g : C_* \to D_*$

Homotopie je posloupnost $s_n : C_n \to D_{n+1}$ tak, že platí

$d_D \circ s_n + s_{n-1} \circ d_C = \cancel{f}g$

↑ minus?

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} & C_n \arrow[r, "d_C"] \arrow[dl, "s_n"'] \arrow[d, "fg"] & C_{n-1} \arrow[dl, "s_{n-1}"] \\
D_{n+1} \arrow[r, "d_D"'] & D_n & D_{n-1}
\end{tikzcd}$$

← minus?

$g - f = \partial h + h \partial$

Lemma: Jsou-li f a g homotopické řetězcové homomorfismy, pak indukované $f_* : H_n(C) \to H_n(D)$, $g_* : H_n(C) \to H_n(D)$ jsou stejné.

Dk: Stačí ukázat, že $f_* - g_* = 0$. $c \in Z_n(C)$ $f(c) - g(c) = d_D \circ s_n(c) + s_{n-1} \circ \underset{0}{d_C(c)} \in B_n$!

na úrovni homologií je $(f-g)[c] = 0$

- exaktní posloupnost (řet. komplex) $\cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \cdots$

  indukuje krátké exaktní posloupnosti: $0 \to B_{n+1} \hookrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial} B_n \twoheadrightarrow$

  $0 \to B_n \hookrightarrow C_n \xrightarrow{\partial} B_{n-1} \to$

- naopak: jsou-li $0 \to B_n \to C_n \to B_{n-1} \to 0$ exaktní, pak

$$\begin{tikzcd}
B_{n+1} \arrow[dr, hook] & & & & B_{n-1} \arrow[dr, hook] & & \\
& C_{n+1} \arrow[rr, "f_{n+1}"] \arrow[dr, two heads] & & C_n \arrow[ur] \arrow[rr, "f_n"'] & & C_{n-1} \arrow[dr, two heads] & \\
& & B_n \arrow[ur, hook] & & & & B
\end{tikzcd}$$

$\parallel$
$\operatorname{im} f_{n+1} = \ker f_n$

je exaktní.

Def. **Rezolventa** (nalevo) modulu A je řetězcový komplex $C \in Ch_{\geq 0}$ společně s "augmentací" $C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A$ t.ž. $\cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \to 0$ je exaktní

Ekvivalentně: $H_n C = 0,\ n > 0$

$H_0 C = C_0 / B_0 \xrightarrow[\cong]{\varepsilon} A$ ... surjektivní $\iff$ exaktnost v A

injektivní $\iff$ exaktnost v C_0

pohled z jiné strany:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & C_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "\varepsilon"] \\
A[0]
\end{tikzcd}$$

... modul A chápaný jako řet. komplex koncentrovaný v dim

! Ekvivalentně: $\varepsilon : C \xrightarrow{\sim} A[0]$ je kvaziizomorfismus.

kvaziizo

Def. **Projektivní rezolventa** = rezolventa taková, že každý modul C_n je projektivní. Analogicky definujeme **volnou**, **plochou** rezolventu...

Konstrukce projektivní (volné) rezolventy daného modulu A:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[dr] & & 0 & & & \\
& & B_1 \arrow[dr, hook] \arrow[ur] & & & & \\
& P_2 \arrow[ur, two heads] \arrow[rr] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_0 \arrow[r, "\varepsilon", two heads] & A \\
B_2 \arrow[ur, hook] & & & & B_0 = \ker \varepsilon \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[u] & & & 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

- - - - vyjádříme A jako kvocient projektivního (volného)

Duálně: **injektivní (ko)rezolventa** | rezolventa na pravo : $A[0] \xrightarrow{\sim} C$

kořetězcový komplex: $0 \to A \to \underbrace{C^0 \to C^1 \to}_{\text{injektivní}}$

konstrukce:

$$\begin{tikzcd}
& & & B^2 \arrow[dr, hook] & & \\
A \arrow[r, tail] & E^0 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & E^1 \arrow[u] \arrow[r] & E^2 \arrow[dr, two heads] & \\
& & B^1 \arrow[ur, hook] & & & B^2
\end{tikzcd}$$

. . . vložíme A do injektivního modulu E^0

Derivované funktory

funktor $F: \text{Mod-}R \longrightarrow \text{Mod-}S$

$$\begin{tikzcd}
M_R \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & F(M)_S \arrow[d, "f_* = F(f)"] \\
M'_R \arrow[r, mapsto] & F(M')_S
\end{tikzcd}$$

– modulu M přiřadí modul $F($

– homomorfismu $M \xrightarrow{f} M'$ p

homom. $F(M) \xrightarrow{f_*} F(M')$

tak, že $id_* = id$

$(gf)_* = g_* f_*$

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend left, "gf"] & & \cdot \arrow[d, "f_*"'] \arrow[dd, bend left, "(gf)_*"] \\
\cdot \arrow[d, "g"'] & \longmapsto & \cdot \arrow[d, "g_*"'] \\
\cdot & & \cdot
\end{tikzcd}$$

Př $M \mapsto M \otimes_R N$, $f_* = f \otimes id$. Tento funktor budeme značit $- \otimes_R N$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "f"'] & M \otimes_R N \arrow[d, "f_* = f \otimes id"] \\
M' & M' \otimes_R N
\end{tikzcd}$$

$Hom_R(N,-): M \mapsto Hom_R(N,M)$ $Hom_R(-,N): M \mapsto Hom_R(M,N)$

kontravariantní funktor

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "f"'] & Hom_R(M,N) \\
M' & Hom_R(M',N) \arrow[u, "f_*"']
\end{tikzcd}$$

Aditivní funktor: splňuje $(f+g)_* = f_* + g_*$, $0_* = 0$

jinak: $Hom_R(M,M') \longrightarrow Hom_S(F(M),F(M'))$ je homom. grup

$f \mapsto f_*$

Poznamka (Lemma) Aditivní funktory zachovávají biprodukty

Dk: $M \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} M \oplus M' \underset{q}{\overset{j}{\leftrightarrows}} M'$ $pi = id_M$, $qj = id_{M'}$, $qi = 0$, $pj = 0$ $ip + jq = id$

Aplikací F dostaneme $F(M) \underset{p_*}{\overset{i_*}{\rightleftarrows}} F(M \oplus M') \underset{q_*}{\overset{j_*}{\leftrightarrows}} F(M')$

$q_* i_* = (qi)_* = 0_* = 0$ $i_* p_* + j_* q_* = (ip)_* + (jq)_* \overset{\text{aditivita}}{=} (ip + jq)_* = id_* = id$ ■

jen tak na okraj

$f+g: M \xrightarrow{\Delta} M \oplus M \xrightarrow{f \oplus g} M' \oplus M' \xrightarrow{\nabla} M'$

Př $- \otimes_R N$ je aditivní : $(f+g) \otimes id = f \otimes id + g \otimes id$

Je-li F aditivní, pak obrazem řetězcového komplexu je řetězcový komplex $\partial\partial = 0$ $\partial_*\partial_* = 0$

tedy máme funktor $F: Ch_R \longrightarrow Ch_S$ $F(C)$

Zprava exaktní funktor: aditivita + zachovává exaktnost

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0 \Rightarrow FA \xrightarrow{f_*} FB \xrightarrow{g_*} FC \to 0$

ekvivalentně: zachovává kojádra $C = \text{coker } f \Rightarrow FC = \text{coker } f_*$

Př $-\otimes_R N$ je zprava exaktní (tj: $A\to B\to C\to 0$ exaktní $\Rightarrow A\otimes_R N\to B\otimes_R N \to$
$\to C\otimes_R N\to 0$ exaktní)

Exaktní funktor = zachovává krátké exaktní posloupnosti

např. $-\otimes_R N$ je exaktní $\Leftrightarrow$ N je plochý

Př $\mathrm{Hom}_R(N,-)$ je zleva exaktní. Exaktní je $\Leftrightarrow$ N projektivní

Př $\mathrm{Hom}_R(-,N)$ je taky zleva exaktní (věc dohody), exaktní je $\Leftrightarrow$ N je injektivní.

$$A\to B\to C\to 0$$

$$0\to \mathrm{Hom}_R(C,N)\to \mathrm{Hom}_R(B,N)\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A,N)$$

DÚ: exaktní = zprava exaktní + zleva exaktní
$\Updownarrow$ zachovává všechny exaktní posloupnosti

Def. Nechť F je zprava exaktní funktor. Potom **n-tý derivovaný funktor** $L_nF: \text{Mod-}R \longrightarrow \text{Mod-}S$ je $L_nF(A) \overset{\text{def}}{=} H_n(F(P_\bullet))$, kde $\varepsilon: P_\bullet \xrightarrow{\sim} A[0]$ je projektivní rezolventa.

Naším nejbližším cílem bude ukázat, že $L_nF(A)$ "nezávisí" na volbě P.

Přesměji

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dd, dashed, "\exists f"'] \arrow[rd, "\varepsilon", "\sim"'] & \\ & A[0] \\ P' \arrow[ru, "\sim", "\varepsilon'"'] & \end{tikzcd}$$

tak, že
$$\begin{tikzcd} F(P) \arrow[d, "f_*"', "\sim"] \\ F(P') \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} H_nP \arrow[rd, "\varepsilon_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \\ H_nP' \arrow[r, "\varepsilon'_*"'] & H_nA[0] \end{tikzcd}$$

$$\Longrightarrow \begin{tikzcd} H_n(F(P)) \arrow[d, "\exists!"', "\cong"] \\ H_n(F(P')) \end{tikzcd}$$

existuje skoro jedině, ale všechny indukují jediný izo

Př Aditivní funktory obecně nezachovávají kvaziizo.

v $\mathbb{Z}$-modulech:

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "2x"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ {} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \xrightarrow{-\otimes \mathbb{Z}/2} \begin{tikzcd} {} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r] \arrow[d, "id"] & {} \\ {} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

$\uparrow$ rezolventa $\mathbb{Z}/2$

= násobení dvěm v $\mathbb{Z}/2$

$H_0 = L_0(-\otimes \mathbb{Z}/2)(\mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$

$H_1 = L_1(-\otimes \mathbb{Z}/2)(\mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$

$H_n = 0 \quad n>1$

$\Rightarrow$ není q-iso

Značení $L_n(-\otimes_R N)(M) = \mathrm{Tor}_n^R(M,$

Spočítali jsme $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$

DÚ: Spočítejte $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n)$

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$ exaktní

$\Downarrow$

$$\begin{tikzcd} FP_1 \arrow[r, "\partial_1"] & FP_0 \arrow[r] & FA \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$ exaktní

$L_0^F(A) = FP_0 / \mathrm{im}\,\partial_1 = \mathrm{coker}\,\partial_1 = FA$

__Pozorování:__ Vždy platí $L_0F(A) = F(A)$

F exaktní $\Rightarrow L_nF(A) = 0,\ n>0$, tj.

L_nF __měří neexaktnost F__

Řetězcová htpická ekvivalence: $f: C \to D$ t.ž. existuje $g: D \to C$ tak, že $gf \sim id,\ fg \sim id$

__Tvrzení:__ Homotopická ekvivalence je kvaziizo

__Tvrzení:__ __Každý aditivní funktor zachovává htpické ekvivalence.__

__Dk:__ $g-f = \partial h + h\partial \overset{F(\,)}{\Longrightarrow} g_*-f_* = \partial_* h_* + h_*\partial_*$ tj. h_* je htpie mezi f_*, g_* ■

$\boxed{\text{VĚTA}}$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, dashed, "\exists g"'] & A[0] \arrow[d, "f"] \\ P' \arrow[r, "\sim"] & A'[0] \end{tikzcd}$$

$\exists\, g$ jediné až na řetězcovou htpii

__Důsledek__

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr, "\sim"] \arrow[d, dashed, "f"'] & \\ P' \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, dashed, "g"'] & A[0] \\ P \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, shift right, "gf"'] \arrow[d, shift left, "id"] & A[0] \\ P \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

$gf \sim id$, analog. $fg \sim id$

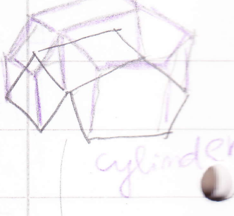
$$\begin{tikzcd} FP \arrow[d, "f_*"] \\ FP' \end{tikzcd}$$ $\leftarrow$ htpická ekviv. $\Rightarrow$ q-iso $\Rightarrow L_nF(A)$ dobře def.

jediné až na htpii $\Rightarrow$ $$\begin{tikzcd} H_nFP \arrow[d] \\ H_nFP' \end{tikzcd}$$ jediné

__Def__ A cylinder cyl(C) is defined : (C ← chain complex)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] cyl(C)_{n+1} \arrow[d, "d"] & = & C_{n+1} \arrow[d, "d"'] & \oplus & C_n \arrow[dll, "-id"'] \arrow[d, "-d"] \arrow[drr, "id"] & \oplus & C_{n+1} \arrow[d, "d"] \\ cyl(C)_n & = & C_n & \oplus & C_{n-1} & \oplus & C_n \end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} d & -id & 0 \\ 0 & \boxed{-d} & 0 \\ 0 & id & d \end{pmatrix}$$



cylinder

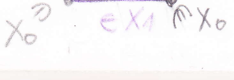
kartézský součin s intervalem

__Motivation:__ $C_n = \overset{\text{free group}}{\mathbb{Z}X_n}$ .... X_n ... n-dimensional faces of something

$cyl(C)_n = \mathbb{Z}(X_n \sqcup X_{n-1} \sqcup X_n) = \mathbb{Z}X_n \oplus \mathbb{Z}X_{n-1} \oplus \mathbb{Z}X_n$

$V_- \times X \quad e \times X \quad V_+ \times X$

$= C_n \oplus C_{n-1} \oplus C_n$



boundary: $d(e\times x) = V_+ \times X - e \times dx - V_- \times X$

a "suspension of C.

There is a short exact sequence $0 \to C \oplus C \to cyl(C) \to C[1] \to 0$

the subcomplex formed by $C_n \oplus 0 \oplus C_n$

chain complex
tj. posunutí o 1
a změna znaménka
diferenciálu

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[d, "-d"] \\ C_{n-1} \end{tikzcd}$$

Describe chain maps $cyl(C) \longrightarrow D$:

it has 3 components

$$\begin{tikzcd} C_n \oplus C_n \arrow[d] \arrow[dr, "{(f,g)}"] & \\ cyl(C)_n \arrow[r] & D_n \\ C_{n-1} \arrow[u, hook] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

f, g should be chain maps

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & fx+gy \arrow[d, mapsto] \\ \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ dy \end{pmatrix} \arrow[r, mapsto] & dfx+dgy \end{tikzcd}$$

$dfx + dgy$ '' $fdx + gdy$ $\Leftarrow$

$df = f$
&
$dg =$

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & hz \arrow[d, mapsto] \\ \begin{pmatrix} -z \\ -dz \\ z \end{pmatrix} \arrow[r, mapsto] & -fz - hdz + gz \end{tikzcd}$$

dhz $\parallel$ $-fz-hdz+gz$ $\Longleftrightarrow$ $dh + hd = g - f$

Conclusion: chain maps $cyl(C) \to D$ are: two chain maps $f, g : C \to$
together with a chain homotopy h between f, g.

Diagramatically: a homotopy between f, g is an extension

$$\begin{tikzcd} C \oplus C \arrow[d] \arrow[dr, "{(f,g)}"] & \\ cyl(C) \arrow[r, dashed] & D \end{tikzcd}$$

Back to the proof of "uniquenes" of projective resolutions
= rezolventa

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr] \arrow[dd, dashed, "\exists"'] & \\ & A[0] \\ C \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

P — chain complex of proj. modules

C .... resolution of A

$$Hom(P, C)/_{htpy} \xrightarrow{\cong} Hom(P, A[0])/_{htpy}$$

'' up to homotopy

Remark: The homotopy cathegory of chain complexes of R-modules
.... $K(R)$ ... obj: chain complexes of R-modules
mor. chain htpy classes of chain maps

in $K(R)$ the projective resolution is unique up to a unique isomorphism

Proof:

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] \arrow[dd, dashed] & & P_1 \arrow[rr, "d"] \arrow[dd, dashed, "f_1"'] \arrow[dr, dashed, "f_0'"] & & P_0 \arrow[dr, "\delta"] \arrow[dd, dashed, "f_0"] & \\ & Z_1 \arrow[dr] & & Z_0 \arrow[dr, hook] & & A \\ {} \arrow[rr] \arrow[ur] & & C_1 \arrow[rr, "d"] \arrow[ur, two heads] & & C_0 \arrow[ur, two heads, "\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

- f_0 exists so that $\delta = \varepsilon f$ by projectivity of P_0 and surjectivity of

- $f\circ d$ exists through Z_0 because $\varepsilon f\circ d = \delta d = 0$ (δ is a chain map)
- f_1 exists so that $df_1 = f\circ d$ by projectivity of P_1 & surj. of $d: C_1 \to Z_0$
- Uniqueness up to chain htpy can be expressed in the following way:

$$\begin{tikzcd}
P\oplus P \arrow[r, hook] \arrow[d, "{(f,g)}"'] & cyl(P) \arrow[d] \arrow[dl, dashed] & \arrow[l] & P_0\oplus P_0 \arrow[d, "{(\delta,\delta)}"] \\
C \arrow[r, "\sim"] & A[0] & & A
\end{tikzcd}$$

a <u>relative</u> version of the same existence claim as before:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr] \arrow[d, "f"'] & \\
C \arrow[r, "\sim"'] & A[0]
\end{tikzcd}$$

but f is already defined on a subcomplex $\tilde{P} \subseteq P$ and we want to extend it to P.

<u>conclusion:</u> the same proof works if each P_n is a direct sum of $\tilde{P}_n$ with a projective module. and this is the case for $P\oplus P \hookrightarrow cyl(P)$.

<u>Fundamental property of left derived functors:</u>

when $0 \to A \to B \to C \to 0$ is exact then there is an exact sequence

$$\dots \to L_{n+1}FC \to L_nFA \to L_nFB \to L_nFC \to L_{n-1}FA \to \dots$$
$$\dots \to L_1FC \to FA \to FB \to FC \to 0$$

$L_nFA = H_n(FP)$ ... where $P \xrightarrow{\sim} A[0]$ is a projective resolution

hence F ex. $\Rightarrow L_nF = 0$ $\forall n > 0$ (viz minulá přednáška)

In the opposite direction $L_1F = 0 \Rightarrow F$ exact

↑ from the long exact sequence of left derived functors

This long exact sequence is induced from a short exact sequence

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & FP \arrow[r] & FR \arrow[r] & FQ \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A[0] \arrow[r] & B[0] \arrow[r] & C[0] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Enough to find projective res. P, R, Q fitting into a short exact sequence as above in such a way that $0 \to FP \to FR \to FQ \to 0$ is also exact.