$X_i \sim Alt(p) \Rightarrow$ sdružená hustota: $\prod_{i=1}^{N} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$

$T(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim Bin(N, p)$

X_i... Bernoulliho pokusy $\Rightarrow X_i \sim Bin(1, p)$

OBECNĚ:

$f_1(\mathbb{x}|\theta) \,/\, f_2(t|\theta)$ nezávisí na θ; $f_1(\mathbb{x}|\theta)$... sdružená hustota $\mathbb{X}$

$f_2(t|\theta)$... hustota $T(\mathbb{X})$

KONKRÉTNĚ:

$f_1(\mathbb{x}|p) = \prod_{i=1}^{N} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$ ... sdružená hustota $\mathbb{X}$

$f_2(t|p) = \binom{N}{t} p^t (1-p)^{N-t}$ ... hustota $T(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{N} X_i$ ... $\boxed{t = \sum_{i=1}^{N} x_i}$

$$\frac{f_1(\mathbb{x}|p)}{f_2(t|p)} = \frac{\prod_{i=1}^{N} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}}{\binom{N}{t} p^t (1-p)^{N-t}}$$

$$= \frac{p^{\overbrace{\sum_{i=1}^{N} x_i}^{t}} (1-p)^{\sum_{i=1}^{N}(1-x_i)}}{\binom{N}{t} p^t (1-p)^{N-t}} \qquad \sum_{i=1}^{N}(1-x_i) = \sum_{i=1}^{N} 1 - \overbrace{\sum_{i=1}^{N} x_i}^{t} = N-t$$

$$= \frac{\cancel{p^t}\,\cancel{(1-p)^{N-t}}}{\binom{N}{t} \cancel{p^t}\,\cancel{(1-p)^{N-t}}} = \frac{1}{\binom{N}{t}} = \frac{1}{\binom{N}{\sum_{i=1}^{N} x_i}} = \binom{N}{\sum_{i=1}^{N} x_i}^{-1}$$ ... nezávisí na p $\rightarrow$

$\rightarrow$ $T(\mathbb{X}) = \sum_{i=1}^{N} X_i$ je postačující statistika pro parametr p.

Poznámka: • Speciálním případem statistiky je testovací statistika.

• Příklady statistik: $\bar{X}$, S_n^2, S_{n-1}^2, $Z_W = \frac{X/(N-p)}{\sqrt{p(1-p)/N}}$, $T_W = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$,

$Z_W = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, apod.

OBECNĚ:

$f_1(\mathbb{X}|\theta)\,/\,f_2(t|\theta)$ nezávisí na θ; $f_1(\mathbb{X}|\theta)$... sdružená hustota $\mathbb{X}$

$f_2(t|\theta)$... hustota $T(\mathbb{X})$

KONKRÉTNĚ:

$f_1(\mathbb{X}|\mu)\,/\,f_2(t|\mu)$ nezávisí na μ; $f_1(\mathbb{X}|\mu)$... sdružená hustota $\mathbb{X}$, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$f_2(t|\mu)$... hustota $T(\mathbb{X}) = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$$f_1(\mathbb{X}|\mu) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_2(t|\mu) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{n}}}\, e^{-\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{f_1(\mathbb{X}|\mu)}{f_2(t|\mu)} = \frac{\prod_{i=1}^{n}(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{n^{\frac{1}{2}}(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}}} = \frac{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= n^{-\frac{1}{2}}(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{-\sum(x_i-\mu)^2 + n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}} = n^{-\frac{1}{2}}(2\pi\sigma^2)^{\frac{1-n}{2}}\, e^{\frac{-\sum(x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2) + n(\bar{x}^2 - 2\bar{x}\mu + \mu^2)}{2\sigma^2}}$$

$$= n^{-\frac{1}{2}}(2\pi\sigma^2)^{\frac{1-n}{2}}\, e^{\frac{-\sum x_i^2 + 2\mu\sum x_i - \sum\mu^2 + n\bar{x}^2 - 2\mu n\bar{x} + n\mu^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= n^{-\frac{1}{2}}(2\pi\sigma^2)^{\frac{1-n}{2}}\, e^{\frac{-\sum x_i^2 + \cancel{2\mu n\bar{x}} - \cancel{n\mu^2} + n\bar{x}^2 - \cancel{2\mu n\bar{x}} + \cancel{n\mu^2}}{2\sigma^2}} =$$

$$= n^{-\frac{1}{2}}(2\pi\sigma^2)^{\frac{1-n}{2}}\, e^{\frac{-\sum x_i^2 + n\bar{x}^2}{2\sigma^2}} = n^{-\frac{1}{2}}(2\pi\sigma^2)^{\frac{1-n}{2}}\, e^{\frac{-\sum x_i^2 + n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 - n\bar{x}^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= n^{-\frac{1}{2}}(2\pi\sigma^2)^{\frac{1-n}{2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2\right)} =$$

$$= n^{-\frac{1}{2}}(2\pi\sigma^2)^{\frac{1-n}{2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum x_i^2 - 2n\bar{x}\frac{1}{n}\sum x_i + n\bar{x}^2\right)} =$$

$$= n^{-\frac{1}{2}}(2\pi\sigma^2)^{\frac{1-n}{2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum x_i^2 - 2\bar{x}\sum x_i + \sum\bar{x}^2\right)} =$$

$$= n^{-\frac{1}{2}}(2\pi\sigma^2)^{\frac{1-n}{2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\left(x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2\right)} =$$

$$= n^{-\frac{1}{2}}(2\pi\sigma^2)^{\frac{1-n}{2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} =$$

$$= n^{-\frac{1}{2}}(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n-1}{2}}\, e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$ ... nezávisí na μ $\longrightarrow$ $T(\mathbb{X}) = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ je

postačující statistika pro parametr μ.

3.3

Monotónní poměr věrohodnosti pro parametr p binomického rozdělení

Nechť $X \sim Bin(N,p)$, kde $\Theta = p$. Fce věrohodnosti je definována jako

$$L(p|x) = p^x (1-p)^{N-x},$$

kde $X = \sum_{i=1}^{N} x_i$, $\mathbb{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$. Poměr věrohodnosti $L(p_2|\mathbb{x}) / L(p_1|\mathbb{x})$ má potom tvar

$$\frac{L(p_2|\mathbb{x})}{L(p_1|\mathbb{x})} = \frac{p_2^x (1-p_2)^{N-x}}{p_1^x (1-p_1)^{N-x}} = \frac{p_2^x (1-p_2)^N (1-p_2)^{-x}}{p_1^x (1-p_1)^N (1-p_1)^{-x}} =$$

$$= \frac{p_2^x (1-p_1)^x (1-p_2)^N}{p_1^x (1-p_2)^x (1-p_1)^N} = \underbrace{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}_{>1}^x \underbrace{\left(\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)}_{>1}^x \underbrace{\left(\frac{1-p_2}{1-p_1}\right)}_{\text{konstanta} < 1}^N$$

Při pevně zvoleném p_1, p_2 $(0 < p_1 < p_2 < 1)$ a N je poměr věrohodnosti monotónní (rostoucí) funkcí statistiky $x = \sum_{i=1}^{N} x_i$.

```
N <- ...
p2 <- ...
x <- 1,2,...,N ... osa x
p1 <- 0.49, 0.47, ..., 0.01 ... krok animace

lbin <- function(x,N,p) { L(p|x) }

oopts <- ani.options()
ani.record(...)
save Latex ( for(i in 1: length(p1)) {
        L <- L(p2|x) / L(p1[i]|x)     lbin(...) / lbin(...)

        plot(x, L, xlab='', ...)
        mtext(expression( L(p[2], x) / L(p[1], x)), side=..., line=... )   osa y
        mtext('x', ...)
        mtext(bquote( paste( N==.(N), ';', p[1] == .(p1[i]), ';',     středník
                p[2]==.(p2))), side=..., line=... )
    }
```

3.4

Samostatná úvaha.

3.5

Monotónní poměr věrohodnosti pro parametr μ normálního rozdělení (σ^2 známé)

Nechť $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 > 0$ je známý rozptyl. Fce věrohodnosti je definována jako

$$L((\mu,\sigma^2)^T|x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}.$$

Poměr věrohodnosti $L((\mu_2,\sigma^2)^T|x) \,/\, L((\mu_1,\sigma^2)^T|x)$ má potom tvar

$$\frac{L((\mu_2,\sigma^2)|x)}{L((\mu_1,\sigma^2)|x)} = \frac{\cancel{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_2)^2}}{\cancel{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2}} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2\mu_2x_i+\mu_2^2)+\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2\mu_1x_i+\mu_1^2)}$$

$$= e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\cancel{x_i^2}-2\mu_2x_i+\mu_2^2-\cancel{x_i^2}+2\mu_1x_i-\mu_1^2)} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2\mu_2\overbrace{\sum x_i}^{n\cdot\frac{1}{n}\sum x_i = n\bar{x}}+n\mu_2^2+2\mu_1\overbrace{\sum x_i}^{n\bar{x}}-n\mu_1^2\right)} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(n\overbrace{(\mu_2^2-\mu_1^2)}^{(\mu_2-\mu_1)(\mu_2+\mu_1)}-2n\bar{x}(\mu_2-\mu_1)\right)} =$$

$$= e^{\underbrace{\frac{n(\mu_2-\mu_1)}{2\sigma^2}}_{\substack{\text{konstanta} > 0\\ \text{pokud } \mu_1<\mu_2}}\left(2\bar{x}-\underbrace{(\mu_2+\mu_1)}_{\text{konstanta}}\right)} \quad (*)$$

s rostoucím $\bar{x}$ poroste celý výraz

Při pevně zvoleném μ_1, μ_2 ($\mu_1<\mu_2$) je poměr věrohodnosti monotónní (rostoucí / klesající) funkcí statistiky $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

```
sigma <- ...
mu2 <- ...
mu1 <- -0.01, -0.03, ..., -0.49 ... krok animace
m <- -0.7, -0.68, ..., 0, 0.02, ..., 0.5 ... x̄ osa x

lpomer <- function(m, mu1, mu2, sigma, n) { (*) }

oopts <- ...
ani.record(...)
saveLatex(for(i in 1:length(mu1)) {
        L <- lpomer(...)
        plot(m, L, xlab='', ...)
        mtext(expression(...), side=..., line=...) ... osa y
        mtext(expression(bar(x)), side=..., line=...) ... osa x; x̄
        mtext(bquote(paste(mu[1]==.(mu1[i]), ...,
                 sigma^2==.(sigma^2), sep="")), side=...)
        }
```

3.6

Samostatná úvaha