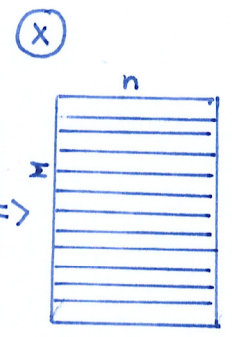


Řešení (a) i (b) v jednom:  $\leftarrow$  **KLWald**  $\leftarrow$  function (mu0, main, n, M=500, mu1=..., mu2=mu1, sigma1=..., sigma1=sigma1, p=0.9, alpha=0.05) }

↑ povinné parametry  
 ↑ parametry s defaultním nastavením  
 ↑ defaultní nastavení - příprava pro (c) a (d)

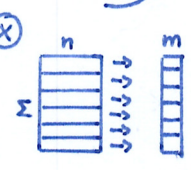
Generování dat

```
M <- 500; n <- 5; p <- 0.9
X <- matrix(NA, M, n)
for (i in 1:M) {
  bin <- rbinom(n, 1, p)
  X[i,][bin == 1] <- rnorm(sum(bin == 1), mu1, sigma1)
  X[i,][bin == 0] <- rnorm(sum(bin == 0), mu2, sigma2)
}
```



Příprava podkladů pro histogram

```
m <- apply(...,...,...) ... vektor průměrů (length(m)=500)
zW <- (x̄ - μ) / (σ / √n) ... vektor 500 realizací test. statistik zW
zW ~ N(0,1)
```



```
histogram
d <- hist(zW, plot=F)$dens ... výšky sloupců histogramu (využijeme později)
xfit <- seq(min(zW)-10, max(zW)+10, length=...)
yfit <- dnorm(...) ... hustota N(0,1) nad xfit
akt. hl. vyzn <- sum(abs(zW) > qnorm(1-alpha/2)) / M = α̂
akt. p. pokryti <- 1 - α̂
```



počet IS, které obsahují  $\mu=20$  je stejný jako počet  $zW$ , které jsou v absolutní hodnotě větší než  $u_{1-\alpha/2}$ . (Vyplyvá z propojení testu pomocí IS a testu pomocí krit. ohoru.)

Histogram

```
hist(zW, prob=T, ylim=c(0, max(yfit, d)), xlim=..., density=...,
     xlab='', ylab=..., main=..., las=..., col=..., ...) ... histogram
box(...)
mtext(expression(zW), ...) ... zW popisok pod histogramem
mtext(bquote(paste(1-alpha == .(1-alpha), '; ',
                  1-widehat(alpha) == .(akt.p.pokryti))), ...)
mtext(main, ...) ... X ~ N(20, 100); n=5
lines(xfit, yfit, ...) ...
```

KLWald (mu0=20, main='X ~ N(20, 100); n=5', n=5)

! Nezapomente uvést závěr, zda je test konservativní nebo liberální. =>

(a) Data pocházejí z  $N(\mu, \sigma^2)$ , ale my testujeme  $H_0: \mu = 150$  oproti  $H_1: \mu \neq 150$ .  
 (Analogie reálné situace, kde skutečnou hodnotu  $\mu$  měříme (měre být klidně 146), a přesto nějakou  $H_0$  (např.  $H_0: \mu = 150$ ) testujeme.)

(\*) Za platnosti  $H_0$ :  $Z_W = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \stackrel{H_0}{\sim} N(0, 1)$   
 $H_0: \mu = \mu_0$

Pokud  $H_0$  neplatí:  $Z_W = Z_{W,\lambda} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(\lambda, 1)$  ... necentrální normální rozdělení  
 $\Delta$  parametrem necentrality  $\lambda$ .

Zdůvodnění:

Pokud  $H_0$  neplatí:  $Z_{W,\lambda} = Z_W + \lambda = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{\bar{X} - \mu + \mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} = Z_W$

(Pokud  $\mu = \mu_0$ , dostaneme za  $\mu$  hodnotu  $\mu_0$  a získáme  $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$ . Viz (\*).  
 Zde ale například sledujeme, že  $\mu \neq \mu_0$ .)


$N(0, 1) + \lambda \rightarrow N(\lambda, 1)$

$H_0: \mu = \mu_0$        $H_1: \mu \neq \mu_0$   
 $H_0: \mu = 150$      $H_1: \mu \neq 150$

(a)  $\mu = 146, \sigma^2 = 10^2, n = 50$

rozdeleni.zw <- function(mu, mu0 = 150, sigma = 10, sigma2 = sigma, M = 1000, n = 100, p = 0.9, main = '', pozice = 'topleft') {

$X \leftarrow \text{matrix}(NA, M, n)$  //  $M \leq 2000, n \leq 50$

for (...) {  
 ... }  
 =>  Viz předchozí příklad (...).  
 Opět si kód nachystáme i pro směs, která nás čeká v (c) a (d).

$\bar{x} \dots m \leftarrow \text{apply}(\dots)$  vektor průměrů o délce 2000

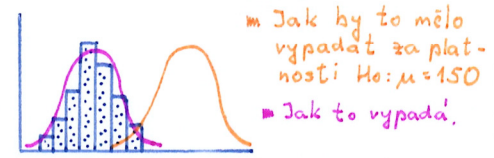
$z_w \dots \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$  vektor test. statistik (2000)

$\lambda \dots \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$  ... posunutí (par. necentrality  $\lambda$ ) ... číslo (délka 1)

$xfit \leftarrow \text{seq}(\dots)$  min(zw) - 6 až max(zw) + 6

$yfit \leftarrow \text{dnorm}(\dots)$   $N(0, 1)$

$\lambda fit \leftarrow \text{dnorm}(\dots)$   $N(\lambda, 1)$



$\text{hist}(z_w, \text{breaks} = 20, \text{ylim} = c(0, \text{max}(yfit) + 0.05),$   
 $\text{xlim} = c(\text{min}(z_w) - 5, \text{max}(z_w) + 5), \text{prob} = T, \dots)$


# Usmíři křivku  $N(\lambda, 1)$  nespouštějte histogram  $Z_W$  dostatečně. Zamysleli se, proč, a co x toho pro nás do prave vyplývá.


$\text{box}(\dots)$

$\text{mtext}(\text{expression}(\dots), \dots) \leftarrow z_w$

$\text{mtext}(\text{bquote}(\dots), \dots) \leftarrow n = 50, \mu_0 = 150$  (automaticky)

$\text{mtext}(\text{main}, \dots) \leftarrow X \sim N(150, 100)$  (main můžeme zadat jako jeden ze vstupů funkce (nebo zautomatizovat. Jak chcete =))

$\text{lines}(xfit, yfit, \dots)$  

$\text{lines}(xfit, \lambda fit, \dots)$   odstrani rámeček okolo legendy (nepovinné; zmenši písmo v legendě)

$\text{legend}(\text{pozice}, \text{fill} = \dots, \text{bty} = 'n', \text{cex} = 0.9, \text{legend} = \dots, \dots)$

(d) rozdeleni.zw(mu = 155, sigma2 = 30, main = 'X ~ 0.9 N(155, 100) + 0.1 N(155, 900)', pozice = 'topright')

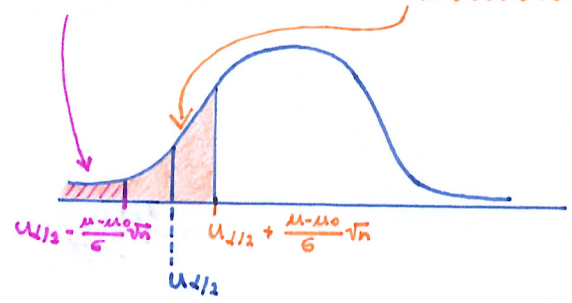


4.4

$H_{01}: \mu = \mu_0$        $H_{11}: \mu \neq \mu_0$        $W = (-\infty; u_{\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}; \infty)$

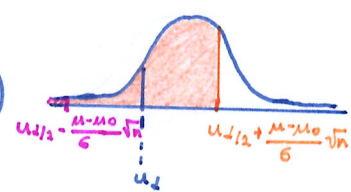
Exaktní síla:  $\beta_{11}^*(\mu) = 1 - \beta_{11}(\mu) = P_r(H_0 \text{ zamítáme} \mid H_0 \text{ neplatí})$

$= \Phi\left(u_{\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}\right) + \Phi\left(u_{\alpha/2} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}\right)$  ... viz předchozí příklad



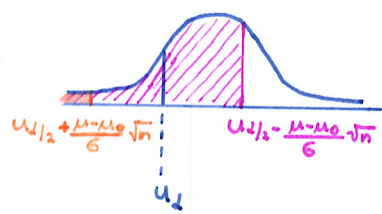
a)  $\mu - \mu_0 > 0$  ( $\mu > \mu_0$ )  $\rightarrow \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} = c \dots$  kladné

$\uparrow(\mu - \mu_0)$ :  $\Phi\left(u_{\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}\right) + \Phi\left(u_{\alpha/2} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}\right) \approx \Phi\left(u_{\alpha/2} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}\right)$   
*s rostoucím  $\mu - \mu_0$ :*  
 klesá, až je zanedka-  
 telně malé      roste



b)  $\mu - \mu_0 < 0$  ( $\mu < \mu_0$ )  $\rightarrow \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} = c \dots$  záporné

$\downarrow(\mu - \mu_0)$ :  $\Phi\left(u_{\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}\right) + \Phi\left(u_{\alpha/2} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}\right) \approx \Phi\left(u_{\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}\right)$   
*s klesajícím  $\mu - \mu_0$ :*  
 roste      klesá, až je zanedka-  
 telně malé



Rozdíl mezi (a) a (b) je pouze v tom, zda  $\mu - \mu_0 > 0$  nebo  $\mu - \mu_0 < 0$ .  
 Sjednotíme tedy obě situace pomocí  $|\mu - \mu_0|$ . Potom  $|\mu - \mu_0| > 0$ .

$\Rightarrow$  **aproximatická síla:**  $\tilde{\beta}_{11}^*(\mu) = \Phi\left(u_{\alpha/2} + \frac{|\mu - \mu_0|}{\sigma} \sqrt{n}\right)$

1. Funkci pro výpočet exaktní síly máme z předchozího příkladu... `sila.exact()`
2. Vytvoříme funkci `sila.aprox()` podobající pro volené  $\mu, \mu_0, \sigma, n, \alpha$  aproximatickou sílu.

```
sila.aprox <- function(mu, mu0, sigma, n, alpha = 0.05) {
  sila <- Phi(u_{alpha/2} + (|mu - mu0| / sigma) * sqrt(n))
  #      ^      ^      ^      ^
  #      pnorm() qnorm() abs()
  return(sila)
}
```

3. Vykreslíme graf (globální pohled):

```
mu <- seq()      poloupínání od 145 do 155 s délkou např. 1024
sila.ex <- sila.exact(mu = mu, mu0 = 150, ...)      vektor hodnot ex. síly (1024)
sila.ap <- sila.aprox(mu = mu, mu0 = 150, ...)      vektor hodnot aprox. síly (1024)
plot(mu, sila.ex, ylim = c(0, 1), ...)      graf křivky exaktní síly (modrá plná čára)
lines(...)      křivka aprox. síly - červenou čarou, přerušovanou čarou (ly=5)
legend(...)      legenda
```

4. Vykreslíme graf (lokální pohled):

```
plot(mu, sila.ex, xlim = c(148, 152), ylim = c(-0.1, 0.4), asp = F, ...)
lines(-||-)
legend(-||-)
```


4.5 exaktní síla ( $\beta_{ii}^*(\mu)$ )... přesná síla, kterou počítáme podle vzorce exaktní síly (definovaná pro dvou-, levo- i pravostř. alb.)<sup>5</sup>  
 aproximační síla ( $\hat{\beta}_{ii}^*(\mu)$ )... přibližná síla, kterou počítáme pomocí vzorce apro. síly (definovaná pouze pro dvoustr. alb.)  
 empirická síla... skutečná síla vypočítaná z reálných nebo simulovaných dat (měříme mluvit i o odhadu exaktní síly z dat, jehož kvalita závisí na kvalitě dat).  
 $\hat{\beta}_{ii}^*(\mu)$  Spočítatelná pro dvou-, levo- i pravostřannou alternativu. emp. síla 1-emp. síla (emp. PCHDD)  

$$\hat{\beta}_{ii}^*(\mu) = \frac{\sum_{i=1}^M I(H_0 \text{ zamítáme})}{M}$$

$$SD[\hat{\beta}_{ii}^*(\mu)] = \sqrt{\frac{\hat{\beta}_{ii}^*(\mu) \hat{\beta}_{ii}^*(\mu)}{M}}$$

1. Vytvoříme funkci na výpočet empirické síly `sila.empir()`:  
`sila.empir` ← function (`mu`, `mu0`, `sigma`, `sigma2 = sigma`, `n = 100`, `M = ...`, `alpha = ...`, `p = ...`, `alternative = 'two.sided'`) {

```

X ← matrix(NA, M, n)
for (i in 1:M) {
  ... }
  ⇒ Σ  n náhodných výběrů o rozsahu n (viz 4.1, 4.2)
  Cílem, naprogramujeme tak, aby generoval i smíšená data (využijeme v části (b)), kde počítáme sílu pro směs.

x̄... m ← apply(...) vektor M=1000 průměrů
z_w... zW ← (x̄ - mu0) / (s / sqrt(n)) vektor test. statistik zW (1000)
p-hodnoty... p ← cbind(pnorm(zW), 1-pnorm(zW))
p ← lapply(p, 1, min) ... vektor M=1000 p-hodnot testů o μ když σ² známe

výpočet empirické síly... if (alternative == 'two.sided') { sila ← sum(p < alpha) / M }
(# Hornamítáme) / M
if ( -||- 'greater' ) { -||- (1-pnorm(zW) < alpha) -||- }
if ( -||- 'less' ) { -||- (pnorm(zW) < alpha) -||- }

return (sila)
}

```

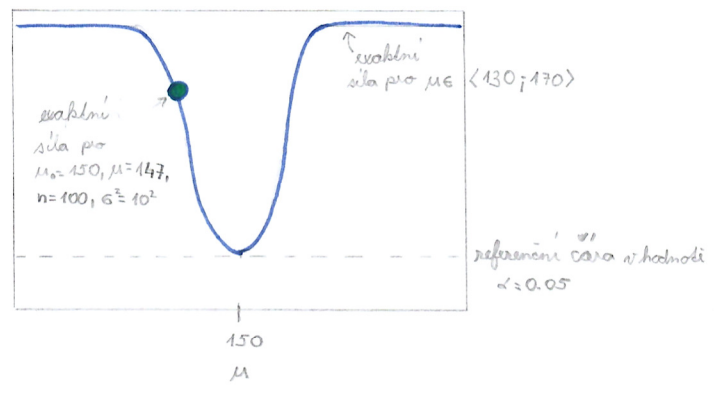
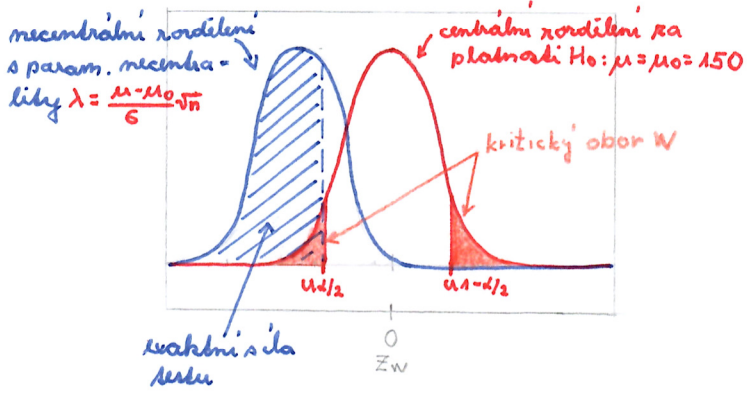
2. Pomocí funkce `sila.empir()` vypočítáme hodnoty empirické síly pro  $\mu_0 = 150$ ,  $\sigma^2 = 10^2$  postupně pro každé  $\mu$   $\mu \in (144, 144.5, \dots, 155.5, 156)$ , hodnoty SD a dolní a horní hranici chybové úsečky  $\hat{\beta}_{ii}^*(\mu) \pm SD[\hat{\beta}_{ii}^*(\mu)]$   
`alpha` ← 0.05; `n` ← 100; `M` ← 1000; `mu0` ← 150; `sigma` ← 10  
`mu` ← seq() ... 144-156 se vzdáleností bodů 0.5 (délka vektoru = 25)  
`sila.emp` ← NULL prázdný vektor  
for (i in 1:length(mu)) {  
`sila.emp`, [i] ← `sila.empir(mu = mu[i], mu0 = ..., sigma = ..., sigma2 = sigma, ...)` (b) `sigma2 = 30`  
} ... vektor  $\hat{\beta}_{ii}^*(\mu)$  o délce 25  
`SD` ←  $\sqrt{\frac{\hat{\beta}_{ii}^*(\mu) (1 - \hat{\beta}_{ii}^*(\mu))}{M}}$  ... `sila.emp` vektor SD (25)  
`dh` ←  $\hat{\beta}_{ii}^*(\mu) - SD$  vektor dolní hranice chybové úsečky (25)  
`hh` ←  $\hat{\beta}_{ii}^*(\mu) + SD$  -||- horní -||- (25)

3. Pomocí fce `sila.exact()` vypočítáme hodnoty exaktní síly pro hustotu sil  $\mu \in (144; 156)$  máločný jako výpočet empirické síly  
`mu1` ← seq()  
`sila.ex` ← `sila.exact(mu = mu1, mu0 = ..., sigma = ..., n = ..., ...)`

4. Vykreslíme graf (a)  
 I. `plot(mu, sila.emp, ylim = c(0,1), ...)` křivka empirické síly (plná, modrá)  
 II. `abline(v = mu0, ...)` svislá referenční čára přesurovaná čára  
 III. `abline(h = alpha, ...)` vodorovná referenční čára přesurovaná čára  
 IV. `lines(mu1, sila.ex, ...)` křivka exaktní síly (čmarná modrá, přesurovaná)  
 V. `arrows(mu, dh, mu, hh, code = 3, angle = 90, length = 0.03)` chybové úsečky I. oboustranná šipka  
 VI. `points(mu, sila.emp, cex = 0.7, ...)` úhel každé šipky 90°. I délka každé šipky  
 VII. `legend(...)` ... legenda ↑ zmenšit velikost bodů

5. Vytvoříme tabulku  
`mu.vyber` ← c(146, ..., 154) definujeme postupně vybraných čísel (n=12)  
`sila.ex.vyber` ← `sila.exact(mu = mu.vyber, ...)` vektor exaktních sil (n=12)  
`sila.emp.vyber` ← NULL ... příprava prázdného vektoru  
for (i in 1:length(mu.vyber)) {  
`sila.emp.vyber` [i] ← `sila.empir(mu = mu.vyber[i], ...)` ... vektor hodnot emp. síly (12)  
}
`tab` ← data.frame(rbind(sila.ex.vyber, sila.emp.vyber), row.names = ...) ... tabulka exaktních a emp. sil
`names(tab)` ← mu.vyber ... změna názvů sloupců

V tomto příkladu využijeme a propojíme poznatky, které jsme získali v příkladech 4.2, 4.3 a 4.5. Výstupem příkladu je animace, ve které se s měnící se hodnotou  $\mu$  mění rozdělení test. statistiky  $Z_W$  a hodnota testní síly. Rozberme si nejprve, co vidíme na jedné dvojici obrázků.



1. Vytvoříme funkci `sila.animace()`, která vykreslí 1 dvojici grafů:  
`sila.animace <- function(mu, mu0, sigma, n, alpha = 0.05) {`

`mu0 <- 150; mu <- 147; sigma <- 10; n <- 100; alpha <- 0.05`

a) 1. graf

$\lambda \dots \frac{\mu - \mu_0}{\sigma \sqrt{n}}$

`x <- seq(..)` posl. od -10 do 10 odleka min 500

`y <- dnorm(..)` hustota  $N(0, 1)$  nad posl. x

`l <- dnorm(..)` hustota  $N(\lambda, 1)$  nad posl. x

průběh graf

`plot(x, y, ylim=c(-0.05; 0.4), xlab='', type='n', ...)`

`mtext(expression(..), ...)` popisek  $Z_W$

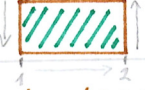
`mtext(kquote(..), ...)` popisek  $n=100, \mu_0=150, \mu=147 \dots$  randomizovaný

`q1 <- qnorm(..)` ... kvantil  $u_{1-\alpha/2}$

`q2 <- qnorm(..)` ... kvantil  $u_{1-\alpha/2}$

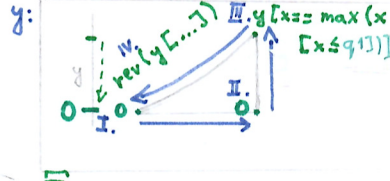
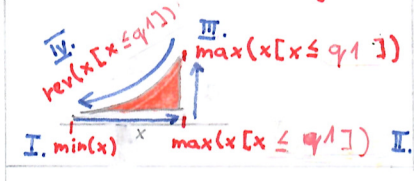
// Funkce `polygon()`:  
`polygon(x, y, col=..., density=..)`  
 vektor x-ových souřadnic, vektor y-ových souřadnic, hustota šrafování

Obdélník:

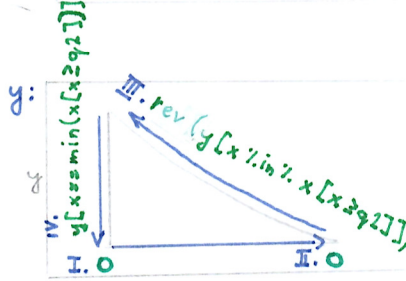
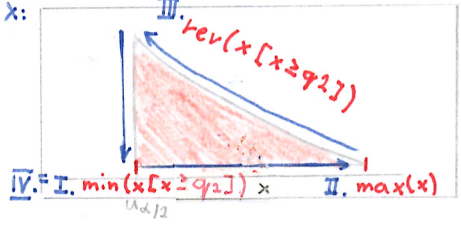


`polygon(x=c(1, 2, 2, 1), y=c(6, 6, 8, 8), col='green', density=20)`

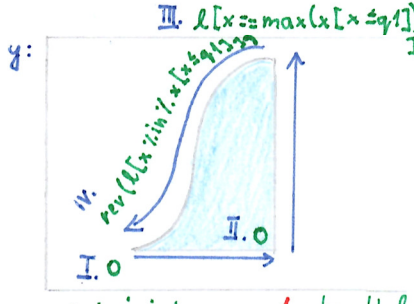
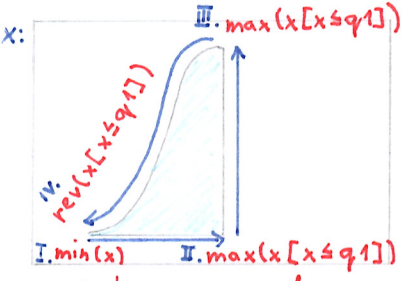
`polygon(x=c(min(x), max(x[x <= q1]), max(x[x <= q1]), rev(x[x <= q1])), y=c(0, 0, max(x[x <= q1]), rev(y[x %in% x[x <= q1]])), col=..., density=..)`  
`x:` I. min(x), II. max(x[x <= q1]), III. max(x[x <= q1]), IV. rev(x[x <= q1])  
`y:` I. 0, II. 0, III. y[x == max(x[x <= q1])], IV. rev(y[x %in% x[x <= q1]])



`polygon(x=c(...), y=c(...), col=..., density=...)`



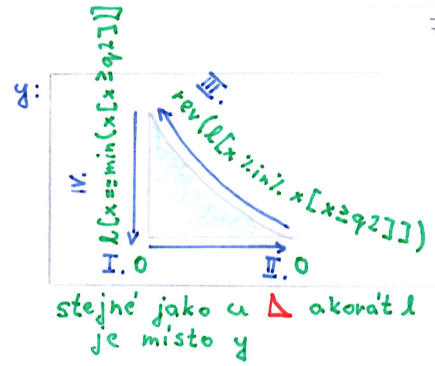
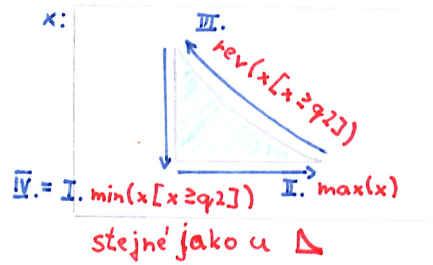
`lines(x, y, col=...)`  
`polygon(x=c(...), y=c(...), col=..., density=...)`



stejně jako u

stejně jako u akorát l je místo y.

polygon (x=c(...), y=c(...), col=..., density=... )



lines(x, l, col=...) legenda vodorovná  
legend(..., horiz=T, lwd=..., col=..., bty=..., ...)

### b) 2. graf

mu1 ← seq(...) poč. od 130 do 170 o min děle 500

sila.ex ← sila.exact(mu = mu1, mu0 = 150, sigma = ..., n = ..., ...) vektor exaktní síly (500)

plot(mu1, sila.ex, ylim = c(-0.4, 1), ...) graf s křivkami exaktní síly

mtext(expression(...), ...) popisek  $\mu$

sila.akt ← sila.exact(mu = mu, mu0 = 150, ...) ... hodnota exaktní síly pro jedno konkrétní  $\mu$  (např.  $\mu = 147$ )

points(mu, sila.akt, ...) vybrání bodu s exaktní silou pro vybrané  $\mu$  ( $\mu = 147$ ).

legend(..., lwd = c(2, NA), pch = c(NA, 19), horiz = T, ...) legenda

abline(...) vodorovná referenční čára v bodě  $l = 0.05$ .

}

### 2. Vytvoříme animaci

mu ← seq() zadana' posl. 140, ..., 146, 146.5, ..., 153.5, 154, 155, ... 160

oopts ←

ani.record ←

saveLatex ( for (i in 1:length(mu)) {

    sila.animace (mu = mu[i], mu0 = 150, sigma = 10, n = 100)

    })

