6 Test o rozptylu

Příklad 6.1. Rozdělení testovací statistiky F_W
Na základě simulační studie prověřte, zda za předpokladu, že

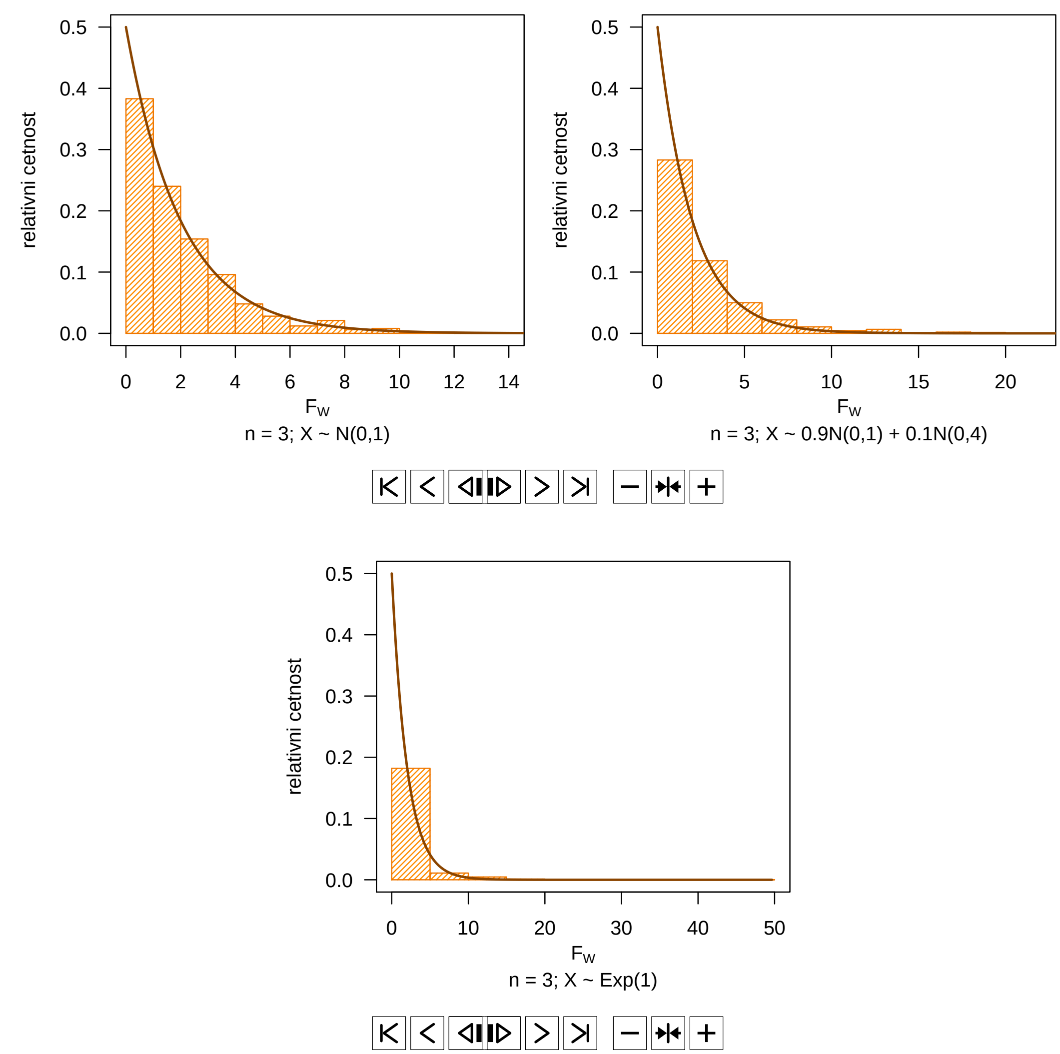
a) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$;

b) $X \sim pN(\mu, \sigma^2) + (1-p)N(\mu, \sigma_2^2)$, kde $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, $p = 0.9$, $\sigma_2^2 = 4$;

c) $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, kde $\lambda = 1$;

má testovací statistika $F_W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ asymptoticky χ^2 rozdělení o $n-1$ stupních volnosti. Pro každou simulaci X_m vypočítejte $F_{W,poz,m}$, $m = 1, 2, \dots, M$, kde $M = 1000$. Histogram vygenerovaných testovacích statistik v relativní škále superponujte teoretickou křivkou hustoty F_W.

Vytvořte animaci demonstrující případnou konvergenci rozdělení testovacích statistik F_W k χ^2_{n-1} rozdělení při rostoucí hodnotě rozsahu n. Hodnoty n volte $n = 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 100, 250, 500$.

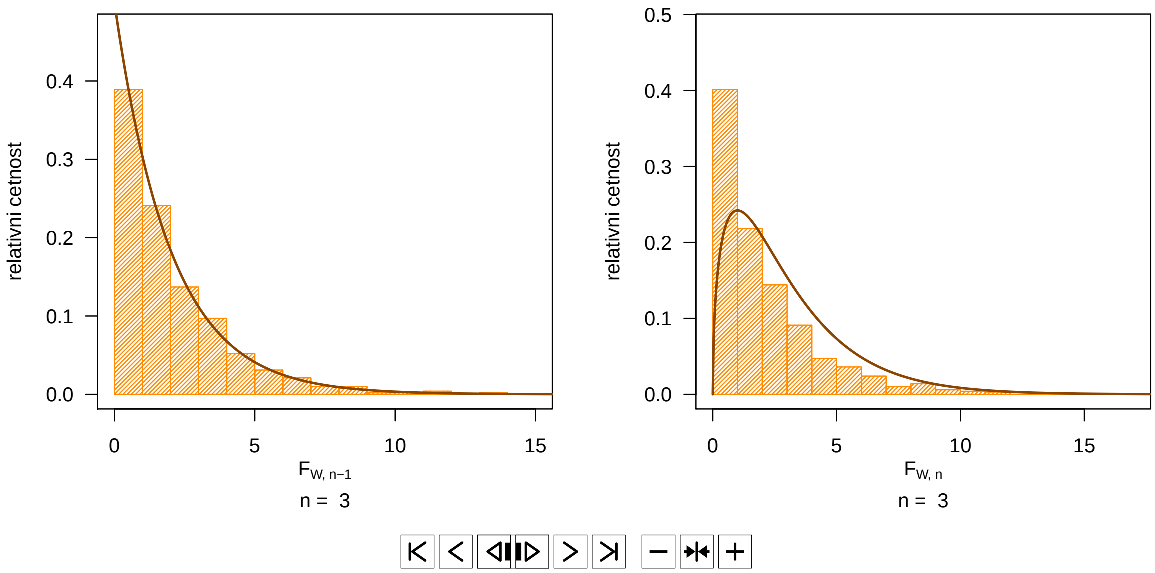


Obrázek 1: Aproximace rozdělení testovací statistiky F_W χ^2 rozdělením za předpokladu, že data pochází (a) z normálního rozdělení, (b) ze smíšeného normálního rozdělení, (c) z exponenciálního rozdělení

Příklad 6.2. Rozdělení testovacích statistik jednovýběrového testu o rozptylu σ^2
Nechť náhodný výběr X pochází z normálního rozdělení, t.j. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu = 150$ a $\sigma^2 = 30^2$. Pomocí simulační studie ověřte, že pro test o rozptylu σ^2 platí za platnosti H_0 následující:

1. $F_{W,n-1} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$
2. $F_{W,n} = \frac{nS_n^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_n$

Vygenerujte $M = 1000$ pseudonáhodných výběrů o rozsahu $n = 3$. Pro každý náhodný výběr vypočítejte hodnoty realizací testovacích statistik $F_{W,n-1}$, $F_{W,n}$. Vytvořte histogramy těchto testovacích statistik a superponujte je křivkami příslušného rozdělení. Dále vytvořte animaci, ze které bude zřejmé, jak se s rostoucím n rozdělení testovacích statistik $F_{W,n-1}$, $F_{W,n}$ asymptoticky blíží k příslušnému rozdělení. Animaci spravte pro měnící se $n \in \{3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 100, 250, 500\}$

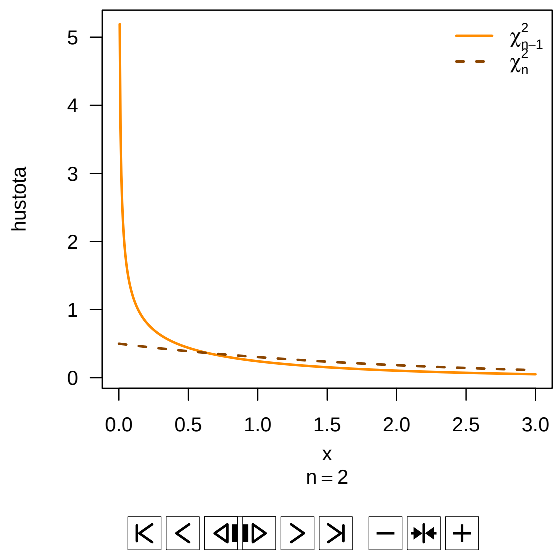


Obrázek 2: χ^2 rozdělení (a) testovací statistiky $F_{W,n-1}$; (b) testovací statistiky $F_{W,n}$

Příklad 6.3. Vzájemná konvergence χ^2_{n-1} a χ^2_n rozdělení

V předchozím příkladu 6.2 jsme si mohli všimnout, že zatímco testovací statistika $F_{W,n-1}$ má už pro malé rozsahy náhodných výběrů χ^2 rozdělení o $n-1$ stupních volnosti, rozdělení testovací statistiky $F_{W,n}$ se blíží k χ^2 rozdělení o n stupních volnosti až s rostoucím rozsahem náhodného výběru n. Vysvětlení je jednoduché. Z definice statistik $F_{W,n}$ a $F_{W,n-1}$ můžeme odvodit, že $F_{W,n} = F_{W,n-1}$, přičemž $F_{W,n-1} \sim \chi^2_{n-1}$. Pro $n \to \infty$ rozdělení χ^2_{n-1} a rozdělení χ^2_n k sobě vzájemně konvergují a proto rozdělení testovací statistiky $F_{W,n}$ se pro $n \to \infty$ blíží k χ^2_n rozdělení. Zbývá tedy ověřit, že skutečně χ^2_{n-1} rozdělení a χ^2_n rozdělení k sobě konvergují pro $n \to \infty$.

Vytvořte animaci demonstrující vzájemnou konvergenci χ^2_{n-1} rozdělení a χ^2_n rozdělení pro $n \to \infty$. Hodnoty n volte postupně $2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 50, 100, 250, 500, 1000$.



Obrázek 3: Vzájemná konvergence χ^2_{n-1} rozdělení a χ^2_n rozdělení

Příklad 6.4. Rozdělení testovacích statistik jednovýběrového testu o rozptylu σ^2
Nechť náhodný výběr X pochází z normálního rozdělení, t.j. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu = 150$ a $\sigma^2 = 30^2$. Pomocí simulační studie ověřte, že pro test o rozptylu σ^2 platí za platnosti H_0 následující:

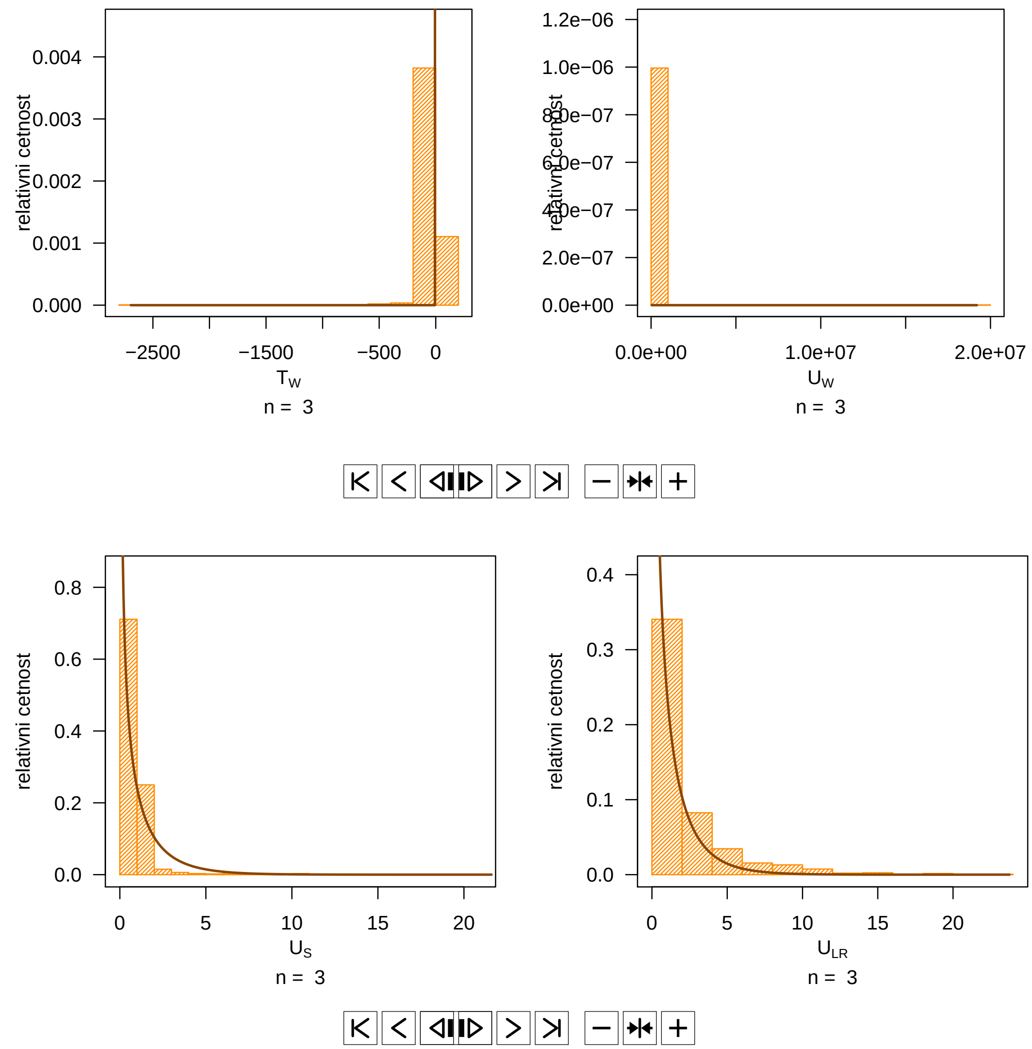
1. $T_W = \sqrt{\frac{n}{2}}\left(1 - \frac{n}{F_{W,n}}\right) \sim N(0,1)$;

2. $U_W = \frac{n}{2}\left(1 - \frac{n}{F_{W,n}}\right)^2 \sim \chi^2_1$;

3. $U_S = \frac{n}{2}\left(\frac{F_{W,n}}{n} - 1\right)^2 \sim \chi^2_1$;

4. $U_{LR} = F_{W,n} - n\left(1 + \ln(\frac{F_{W,n}}{n})\right) \sim \chi^2_1$.

Vygenerujte $M = 1000$ pseudonáhodných výběrů o rozsahu $n = 3$. Pro každý náhodný výběr vypočítejte hodnoty realizací testovacích statistik T_W, U_W, U_S a U_{LR}. Vytvořte histogramy těchto testovacích statistik a superponujte je křivkami příslušného rozdělení. Dále vytvořte animaci, ze které bude zřejmé, jak se s rostoucím n rozdělení testovacích statistik T_W, U_W, U_S a U_{LR} asymptoticky blíží k příslušnému rozdělení. Animaci spravte pro měnící se $n \in \{3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 100, 250, 500\}$.

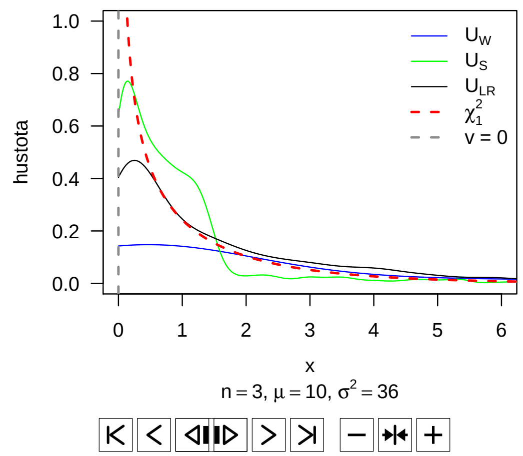


Obrázek 4: Normální rozdělení testovací statistiky T_W a χ^2 rozdělení testovacích statistik U_W, U_S a U_LR

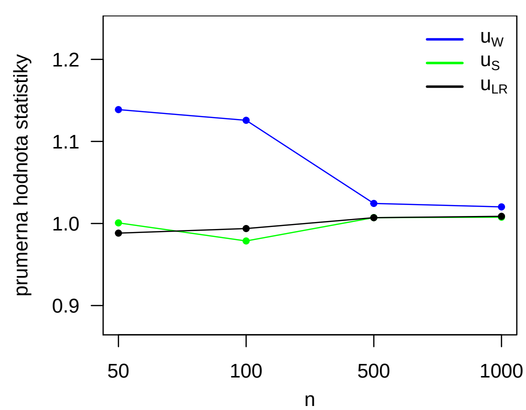
Příklad 6.5. Rozdělení testovacích statistik U_W, U_S a U_{LR} jednovýběrového testu o rozptylu
Předpokládejme, že $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu = 10$ a $\sigma^2 = 6^2$. Testujeme nulovou hypotézu $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ oproti stanovené alternativní hypotéze $H_{11} : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$. Pomocí simulační studie ověřte, že za platnosti H_0 statistiky $U_W = \frac{n}{2}\left(1 - \frac{n}{F_{W,n}}\right)^2$, $U_S = \frac{n}{2}\left(\frac{F_{W,n}}{n} - 1\right)^2$ a $U_{LR} = F_{W,n} - n\left(1 + \ln(\frac{F_{W,n}}{n})\right)$ pochází z χ^2 rozdělení o jednom stupni volnosti, tj $U_W \sim \chi_1^2$, $U_S \sim \chi_1^2$ a $U_{LR} \sim \chi_1^2$. Dále vypočítejte průměrné hodnoty testovacích statistik U_W, U_S a U_{LR} pro $n = 50$, 100, 500 a 1000 a zjistěte, zda pro tyto statistiky platí analogický vztah jako v případě testu o μ při neznámém rozptylu ($U_S < U_{LR} < U_W$; viz příklad 5.4).

Vygenerujte $M = 1000$ pseudonáhodných výběrů o rozsahu $n = 3$. Pro každý náhodný výběr stanovte hodnoty realizací testovacích statistik U_W, U_S a U_{LR}. Pomocí funkce density() vypočítejte jádrové odhady rozdělení testovacích statistik U_W, U_S a U_{LR}. Tyto jádrové odhady zobrazte do jednoho grafu a barevně je odlište. Do grafu dokreslete křivku hustoty χ_1^2 rozdělení a vertikální referenční čáru v hodnotě 0. Vytvořte animaci, ze které bude zřejmé, jak se s rostoucím n rozdělení testovacích statistik U_W, U_S a U_{LR} asymptoticky blíží k χ_1^2 rozdělení. Hodnoty n zvolte $n \in \{3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50, 100, 250, 500\}$. Do komentářů uveďte, která testovací statistika je naprosto nevhodná jako rozhodovací kritétium o $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, pokud rozsah náhodného výběru $n \leq 5$.

Nakonec vypočítejte průměrné hodnoty testovacích statistik U_W, U_S a U_{LR} pro $n = 50$, 100, 500 a 1000, zaneste je do jednoho grafu a vzájemně porovnejte. Závěr porovnání slovně okomentujte.



Obrázek 5: χ_1^2 rozdělení testovacích statistik U_W, U_S, U_{LR} pro test o rozptylu σ^2



Obrázek 6: Porovnání průměrů testovacích statistik U_W, U_S a U_{LR} pro $n = 50, 100, 500, 1000$.

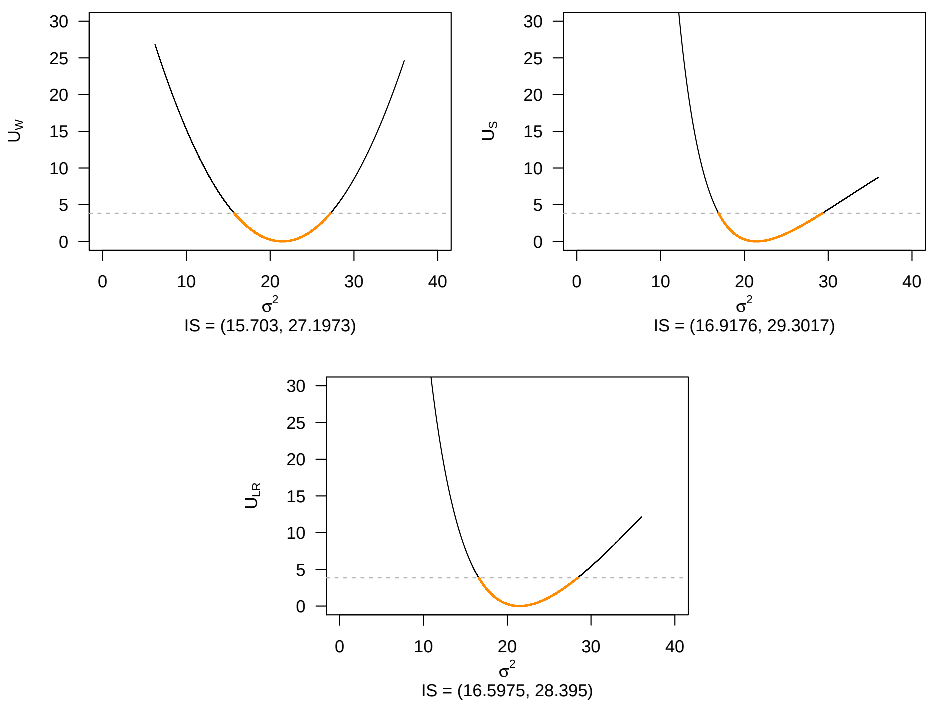
Příklad 6.6. Test o rozptylu σ^2 když μ neznáme; praktický příklad
Z archivních materiálů (Schmidt, 1888) máme k dispozicii původní kraniometrické údaje 215 dospělých mužů a 107 dospělých žen ze starověké egyptské populace basion–bregmatické výšce lebky. Údaje jsou k dispozici v souboru 11-two-samples-means-skull.txt. Současně máme k dispozici průměrné hodnoty basion–bregmatickej výšky ($\bar{x}_m = 133.977$ mm; $\bar{x}_f = 126.942$ mm), hodnoty směrodatné odchylky ($s_m = 5.171$ mm; $s_f = 4.430$ mm).

Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ otestujte hypotézu o shodě rozptylu výšky lebky starověké ženské egyptské populace s rozptylem výšky lebky novověké ženské egyptské populace. Testování proveďte pomocí (a) kritického oboru, (b) intervalu spolehlivosti, (c) p-hodnoty při použití testovacích statistik (1) $F_{W,n-1}$, (2) U_W, (3) U_S, (4) U_{LR}. Dále vykreslete grafy zobrazující věrohodnostní intervaly spolehlivosti pro test o rozptylu σ^2 získaný na základě testovacích statistik U_W, U_S a U_{LR}.

Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ dále otestujte hypotézu o shodě směrodatné odchylky výšky lebky starověké ženské egyptské populace se směrodatnou odchylkou výšky lebky novověké ženské egyptské populace. Testování proveďte pomocí (a) kritického oboru, (b) intervalu spolehlivosti, (c) p-hodnoty při použití testovacích statistik (1) $F_{W,n-1}$, (2) U_W, (3) U_S, (4) U_{LR}.

Tabulka 1: Výsledky testů o rozptylu σ^2 p¡f8¿i pou¡U+009E¿it¡ed¿ testovacích statistik $F_{W,n-1}$, U_W, U_S a U_{LR}

Statistika	$\widehat{\sigma}^2$	statistika	W_{hh}	W_{dh}	IS$_{dh}$	IS$_{hh}$	p-hodnota
$F_{W,n-1}$	21.6528	116.9533	79.4013	136.3822	16.8292	28.9063	0.4394
U_W	21.6528	0.3875		3.8415	15.7030	27.1973	0.5336
U_S	21.6528	0.4629		3.8415	16.9176	29.3017	0.4963
U_{LR}	21.6528	0.4361		3.8415	16.5975	28.3950	0.5090



Obrázek 7: 95 % Věrohodnostní empirické intervaly spolehlivosti pro test o rozptylu σ^2 získané na základě testovacích statistik U_W, U_S a U_{LR}