

Statistická inference II


*Zadání domácího úkolu
jarní semestr 2022*

Stanislav Katina
Veronika Horská

katina@math.muni.cz

6. května 2022

Při vypracování domácího úkolu se řiďte striktně pokyky k domácímu úkolu uvedenými v samostatném .pdf souboru.

*DÚ je nejprve po formální stránce hodnocen cvičícím. Toto hodnocení zahrnuje: (1) přítomnost požadovaných souborů se správnými názvy, (2) kompletnost zpracování, (3) dostatečný opis vašich úvah, zvoleného postupu a interpretace výsledků, ať už tabulkových nebo grafických, (4) funkčnost, přehlednost a úpravu -kódu podle pravidel uváděných na kurzu Statistická inference I, případně v prezentaci *Standards of programming in R: R style guide*.*

DÚ je potřeba odevzdat do odevzdávací 3 pracovní dny před termínem zkoušky, na který se přihlásíte.

Příklad 1. Aktuální pravděpodobnost $(1 - \alpha)100\%$ Waldova empirického DIS pro parametr σ^2

Nechť $X \sim N(0, 3)$. Pomocí simulační studie ($M = 100$) stanovte MC odhad aktuální pravděpodobnosti pokrytí $1 - \hat{\alpha}$ (koeficientu spolehlivosti) pro (a) 95% Waldův exaktní empirický DIS pro parametr σ^2 ; (b) 95% Waldův asymptotický empirický DIS pro parametr σ^2 .

Vygenerujte $M = 100$ náhodných výběrů o rozsahu $n = 100$ z rozdělení $N(0, 3)$. Na základě každého náhodného výběru vypočítejte 95% Waldův exaktní empirický DIS. Všechny DIS vykreslete do jednoho grafu jako svislé šedé úsečky. Červenou barvou vyznačte v grafu ty DIS, které nepokrývají hodnotu parametru σ^2 . Vypočítejte aktuální pravděpodobnost pokrytí 95% Waldova exaktního empirického DIS pro parametr σ^2 jako podíl $\frac{\sum_m I(\sigma^2 \in IS_m)}{M}$ a porovnejte ji s nominální pravděpodobností pokrytí $1 - \alpha$. Vypočítejte hranice 95% Waldova empirického DIS pro nominální pravděpodobnost pokrytí $1 - \alpha$ podle vzorce

$$(g_D(1 - \hat{\alpha}), g_H(1 - \hat{\alpha})) = \left(1 - \hat{\alpha} - u_{1-\alpha/2} \widehat{SD}[1 - \hat{\alpha}], 1 - \hat{\alpha} - u_{\alpha/2} \widehat{SD}[1 - \hat{\alpha}]\right),$$

$$\text{kde } \widehat{SD}[1 - \hat{\alpha}] = \sqrt{\frac{(1 - \hat{\alpha})\hat{\alpha}}{M}}.$$

Postup zopakujte pro 95% Waldův asymptotický empirický DIS pro parametr σ^2 , data však použijte stejná jako pro exaktní DIS. Simulaci proveďte také za předpokladu, že data pochází ze smíšeného rozdělení $X \sim pN(0, 3) + (1 - p)N(0, 1)$, kde $p = 0.9$. Na základě opakovaného spuštění simulační studie u každé ze čtyř uvažovaných situací rozhodněte, zda jsou intervaly spolehlivosti liberální, konzervativní, nebo ani jedno.

Požadovaná forma výstupu příkladu:

- vlastnoručně naprogramovaná funkce DISsigma2(), jejímiž vstupními argumenty budou nasimulovaná data, parametr σ , hladina významnosti α a typ intervalu spolehlivosti (type = 'exact', 'asymptotic') a výstupem bude graf podrobněji popsáný v bodu 2 a tabulka výsledků popsáná v bodu 3;
- dvojice grafů; první graf bude zobrazovat $M = 100$ Waldových exaktních empirických DIS; druhý graf bude zobrazovat $M = 100$ Waldových asymptotických empirických DIS, oba za předpokladu, že $X \sim N(0, 3)$; všechny DIS budou v každém grafu vykresleny jako svislé šedé úsečky; v grafu bude dále vykreslena černá horizontální referenční příčka v hodnotě σ^2 ; DIS, které nepokrývají hodnotu parametru σ^2 budou vyznačeny červenou barvou; pod osou x bude popisek zobrazující hodnotu nominální i aktuální pravděpodobnosti pokrytí;
- tabulka výsledků společná pro exaktní DIS i asymptotický DIS za předpokladu, že $X \sim N(0, 3)$; hodnoty v tabulce budou zaokrouhleny na čtyři desetinná místa (viz tabulka 1);

Tabulka 1: Pravděpodobnost pokrytí 95% Waldových empirických DIS pro parametr σ^2

	$1 - \alpha$	$1 - \hat{\alpha}$	$g_D(1 - \hat{\alpha})$	$g_H(1 - \hat{\alpha})$
exaktní DIS pro σ^2				
asymptotický DIS pro σ^2				

- dvojice grafů; první graf bude zobrazovat $M = 100$ Waldových exaktních empirických DIS; druhý graf bude zobrazovat $M = 100$ Waldových asymptotických empirických DIS, oba za předpokladu, že $X \sim pN(0, 3) + (1 - p)N(0, 1)$, $p = 0.9$; vzhled grafů je popsán v bodě 2;
- tabulka výsledků společná pro exaktní DIS i asymptotický DIS za předpokladu, že $pN(0, 3) + (1 - p)N(0, 1)$, $p = 0.9$; hodnoty v tabulce budou zaokrouhleny na čtyři desetinná místa (viz tabulka 2);

Tabulka 2: Pravděpodobnost pokrytí 95% Waldových empirických DIS pro parametr σ^2 za předpokladu, že náhodný výběr pochází ze smíšeného rozdělení

	$1 - \alpha$	$1 - \hat{\alpha}$	$g_D(1 - \hat{\alpha})$	$g_H(1 - \hat{\alpha})$
exaktní DIS pro σ^2				
asymptotický DIS pro σ^2				

6. podrobné komentáře popisující všechny čtyři zobrazené grafy + čtvero zhodnocení, zda je Waldův exaktní, resp. asymptotický empirický DIS pro $X \sim N(0, 3)$, resp. pro $X \sim pN(0, 3) + (1 - p)N(0, 1)$, $p = 0.9$ liberální, konzervativní, nebo ani jedno; svá rozhodnutí zdůvodněte.

Příklad 2. Minimální rozsah náhodného výběru pro test o pravděpodobnosti p

Předpokládejme, že $X \sim \text{Bin}(N, p)$. Nechť $\theta = p$. Testujeme všechny tři typy hypotéz:

- a) $H_{01} : p = p_0$ oproti $H_{11} : p \neq p_0$ (oboustranná),
 b) $H_{02} : p \leq p_0$ oproti $H_{12} : p > p_0$ (pravostranná),
 c) $H_{03} : p \geq p_0$ oproti $H_{13} : p < p_0$ (levostranná),

kde $p_0 = 0.50$.

Pro hypotézy (a), (b), (c) odvoďte vztah pro minimální rozsah N náhodného výběru při použití testové statistiky Z_W pro test o pravděpodobnosti p . Naprogramujte funkci $\text{min.N}()$, která pro libovolnou z hypotéz (a), (b), (c) při předem stanovené hodnotě p , p_0 , α a $\beta^*(p)$ vypočítá minimální rozsah N náhodného výběru. Pomocí funkce $\text{min.N}()$ vypočítejte minimální rozsah náhodného výběru pro test nulové hypotézy při $\alpha = 0.05$ a $1 - \beta = 0.8$, pro $p \in \{0.36, 0.38, 0.40, 0.42, 0.44, 0.46, 0.48, 0.49, 0.51, 0.52, 0.54, 0.56, 0.58, 0.60, 0.62, 0.64\}$ (ad (a)); $p \in \{0.51, 0.52, 0.54, 0.56, 0.58, 0.60, 0.62, 0.64\}$ (ad (b)); $p \in \{0.36, 0.38, 0.4, 0.42, 0.44, 0.46, 0.48, 0.49\}$ (ad (c)). Závislost minimálního rozsahu náhodného výběru na hodnotě p zakreslete do tečkového diagramu (na osu x vyneste parametr p , na osu y minimální rozsah N náhodného výběru). Pro každý typ nulové hypotézy vyberte jednu libovolnou hodnotu minimálního rozsahu náhodného výběru a řádně ji interpretujte.

Požadovaná forma výstupu příkladu:

- precizní odvození vztahů pro minimální rozsah náhodného výběru pro všechny tři typy hypotéz H_{01} , H_{02} a H_{03} ; při odvození vyjděte ze vztahu $\beta_{11}^*(p) \approx \Phi\left(u_{\alpha/2} + \frac{|p-p_0|}{\sqrt{p(1-p)/N}}\right)$, resp. $\beta_{12}^*(p) = \Phi\left(u_{\alpha} + \frac{p-p_0}{\sqrt{p(1-p)/N}}\right)$, resp. $\beta_{13}^*(p) = \Phi\left(u_{\alpha} - \frac{p-p_0}{\sqrt{p(1-p)/N}}\right)$ analogicky, jako tomu bylo v příkladu 4.7 ve cvičeních SI-II;
- vlastnoručně naprogramovaná funkce $\text{min.N}()$, která pro zadané vstupní parametry p , p_0 , α , $\beta^*(p)$ a zvolený typ alternativy (alternative = 'two.sided', 'greater', 'less') vrátí hodnotu minimálního rozsahu N náhodného výběru (hodnota bude správně zaokrouhlená na nula desetinných míst);
- trojice tečkových diagramů vizualizujících minimální rozsahy náhodných výběrů pro situace (a)–(c) v závislosti na různých hodnotách parametru p ; na ose x budou hodnoty $p \in \{0.36, 0.38, 0.40, 0.42, 0.44, 0.46, 0.48, 0.49, 0.51, 0.52, 0.54, 0.56, 0.58, 0.60, 0.62, 0.64\}$, na ose y hodnoty minimálních rozsahů N ; nad každým bodem v dostatečné výšce bude uveden popisek s příslušnou hodnotou rozsahu náhodného výběru N a pod osou x bude uveden popisek obsahující aktuální hodnoty hladiny významnosti α a síly $\beta^*(p)$;
- komentáře popisující tečkové diagramy minimálních rozsahů N ; v komentářích se zaměřte například na porovnání velikostí rozsahů pro oboustrannou alternativu a jednostranné alternativy. Dále popište změnu velikosti rozsahu N s $p \rightarrow p_0$. Překvapil vás prudký vzrůst rozsahu N a v hodnotě $p = 0.49$ resp. $p = 0.51$? Vysvětlíte, proč s $p \rightarrow p_0$ dochází k navyšování velikostí rozsahů a jak by situace pokračovala, kdybychom předpokládali, že p je ještě bližší p_0 . Jaký důsledek má tento trend v praxi a proč je důležité počítat minimální rozsahy náhodných výběrů ideálně ještě ve fázi plánování experimentu?
- tři interpretace (celou větou) libovolně zvolené hodnoty minimálního rozsahu náhodného výběru za předpokladu H_{01} , resp. H_{02} , resp. H_{03} .

Příklad 3. Silofunkce testu o rozdílu středních hodnot $\mu_1 - \mu_2$ při známých rozptylech σ_1^2 a σ_2^2

Předpokládejme, že $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, kde σ_1^2 a σ_2^2 známe. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujeme všechny tři typy hypotéz

- $H_{01} : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ oproti $H_{11} : \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$ (oboustranná);
- $H_{02} : \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$ oproti $H_{12} : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$ (pravostranná);
- $H_{03} : \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$ oproti $H_{13} : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$ (levostranná).

Odvoďte tvary silofunkcí pro všechny tři typy hypotéz (a)–(c), t.j. tvary $\beta_{11}^*(\mu_1 - \mu_2)$, $\beta_{12}^*(\mu_1 - \mu_2)$ a $\beta_{13}^*(\mu_1 - \mu_2)$. Dále nakreslete silofunkce pro všechny tři typy hypotéz (a)–(c), kde $\mu_0 = 0$, za předpokladu, že $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 2^2$. Do jednoho obrázku zakreslete vždy tvary silofunkcí pro $n_1 = n_2 = 5, 10, 25, 50$ a 100 . Hodnoty rozdílů $\mu_1 - \mu_2$ volte rozumně, např. v intervalu $\langle -6; 6 \rangle$.

Předpokládejme, že $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 2^2$ a hladina významnosti $\alpha = 0.05$. Určete, (a) jakou sílu bude mít test hypotézy $H_{01} : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$, kde $\mu_0 = 0$, za předpokladu, že $n_1 = 50$, $n_2 = 20$ a rozdíl $\mu_1 - \mu_2 = 1.25$; (b) jakou sílu bude mít test hypotézy $H_{02} : \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$, kde $\mu_0 = 0$, za předpokladu, že $n_1 = 85$, $n_2 = 75$ a rozdíl $\mu_1 - \mu_2 = 0.50$; (c) jakou sílu bude mít test hypotézy $H_{03} : \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$, kde $\mu_0 = 0$, za předpokladu, že $n_1 = 175$, $n_2 = 200$ a rozdíl $\mu_1 - \mu_2 = -0.30$; výsledné hodnoty síly vložte spolu se zadanými parametry do přehledné tabulky.

Požadovaná forma výstupu příkladu:

- precizní odvození silofunkce pro všechny tři typy hypotéz H_{01} , H_{02} , H_{03} (analogicky jako tomu bylo v příkladu 4.3 na cvičeních SI-II);
- vlastnoručně naprogramovaná funkce `ExaktniSila()`, která pro zadané hodnoty μ_0 , $\mu_1 - \mu_2$, σ_1 , σ_2 , n_1 , n_2 , α a zvolený typ alternativy (`alternative = 'two.sided', 'greater', 'less'`) vrátí hodnotu exaktní síly;
- trojice grafů; každý graf bude zobrazovat pět křivek odpovídajících silofunkcím testu H_{01} , resp. H_{02} , resp. H_{03} pro $n_1 = n_2 = 5, 10, 25, 50$ a 100 . Zbývající argumenty budou $\mu_0 = 0$, rozdíl $\mu_1 - \mu_2 \in \langle -6, 6 \rangle$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 2^2$, $\alpha = 0.05$. V každém grafu bude zobrazena vodorovná referenční příčka odpovídající hladině významnosti α , popisek osy x obsahující aktuální hodnoty parametrů μ_0 , σ_1^2 , σ_2^2 a α a legenda rozlišující pět vykreslených křivek;
- komentáře popisující trojici grafů; zaměřte se například na popis rozdílů křivek silofunkcí pro různé alternativní hypotézy, porovnejte křivky silofunkcí pro různé rozsahy náhodných výběrů, vysvětlete proč hodnota silofunkce pro oboustrannou alternativu klesá, pokud se zprava či zleva blížíme k $\mu_0 = 0$, popište, kde mají křivky silofunkcí pro oboustrannou své minimum nebo proč křivky silofunkcí pro jednostranné alternativy nejsou symetrické;
- tabulka výsledků (viz tabulka 3).

Tabulka 3: Hodnoty silofunkce pro test o rozdílu středních hodnot $\mu_1 - \mu_2$ při známých rozptylech σ_1^2 a σ_2^2

	μ_0	$\mu_1 - \mu_2$	α	σ_1^2	σ_2^2	n_1	n_2	$\beta^*(\mu_1 - \mu_2)$
$H_{01} : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0$								
$H_{02} : \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$								
$H_{03} : \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$								

Příklad 4. Test o rozdílu dvou korelačních koeficientů; praktický příklad

Mějme datový soubor 05-one-sample-correlation-skull-mf.txt, proměnnou skull.pH popisující největší výšku mozkovny (mm) a proměnnou face.H popisující morfologickou výšku tváře (mm). Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ zjistěte, zda se korelační koeficient největší výšky mozkovny a morfologické výšky tváře mužů liší od korelačního koeficientu největší výšky mozkovny a morfologické výšky tváře žen.

Před testováním ověřte splnění předpokladu dvourozměrné normality obou náhodných výběrů pomocí Mardiova testu. Testování proveďte pomocí (a) kritického oboru; (b) intervalu spolehlivosti (pouze ve Waldově případě); (c) p -hodnoty při použití testových statistik (1) Z_W , (2) U_{LR} . U každého typu testování (a)–(c) pro každý test (1)–(2) uveďte zdůvodněný závěr o H_0 a nakonec uveďte (antropologickou) interpretaci výsledku testování. Uveďte také interpretaci obou výběrových korelačních koeficientů (analogicky, jako tomu bylo v předmětu Statistická inferenze I, v kapitole o dvourozměrném normálním rozdělení).

Požadovaná forma výstupu příkladu:

1. test dvourozměrné normality u mužů:

- stanovení nulové a alternativní hypotézy (slovním zápisem) + hladina významnosti (vhodně upravená vzhledem k počtu testů, např. Bonferroniho procedurou, Scheffého metodou apod.);
 - stanovení nulové a alternativní hypotézy pro test šikmosti (slovním zápisem);
 - stanovení nulové a alternativní hypotézy pro test špičatosti (slovním zápisem);
 - rozhodnutí o nulové hypotéze testu šikmosti;
 - rozhodnutí o nulové hypotéze testu špičatosti;
- rozhodnutí o nulové hypotéze Mardiova testu;
- interpretace výsledků Mardiova testu;
- 3D-diagram;
- tečkový diagram superponovaný 95% elipsou spolehlivosti;
- subjektivní zhodnocení dvourozměrné normality na základě 3D-diagramu a tečkového diagramu;

2. test dvourozměrné normality u žen:

- analogicky jako v bodu 1;

3. test o rozdílu korelačních koeficientů $\rho_1 - \rho_2$:

- stanovení nulové a alternativní hypotézy (i) slovním zápisem; (ii) matematickým zápisem;
- tabulka výsledků (zaokrouhlená na čtyři desetinná místa) testování založeného na testových statistikách Z_W a U_{LR} (viz tabulka 4);

Tabulka 4: Výsledky testu o rozdílu korelačních koeficientů $\rho_1 - \rho_2$ při použití testových statistik Z_W a U_{LR}

Statistika	\hat{p}	statistika	W_{hh}	W_{dh}	IS_{dh}	IS_{hh}	p -hodnota
Z_W							
U_{LR}					-	-	

- zdůvodněné rozhodnutí o nulové hypotéze (u všech způsobů testování u obou testů; analogicky, jako bylo uváděno ve studijních materiálech ke cvičením) + interpretace výsledku testování.

4. Grafická vizualizace:

- jeden tečkový diagram; diagram bude zobrazovat vztah mezi délkou dolní končetiny a délkou trupu u mužů i vztah mezi délkou dolní končetiny a délkou trupu u žen; náhodný výběr mužů bude barevně odlišen od náhodného výběru žen; pro každou populaci bude v diagramu doplněna regresní přímka reprezentující lineární trend; pod osou x bude umístěn popis s hodnotami výběrových korelačních koeficientů; v grafu bude vykreslena legenda;
- komentář k tečkovému diagramu; například porovnejte zobrazené lineární trendy mezi oběma populacemi a dejte je do souvislosti se závěrem testování o H_0 a s finální interpretací výsledku testování.