

1. domácí úkol – MIN201 – jaro 2021 – odevzdat do **26.4.2021**

(i) Určete následující limitu bez použití L'Hospitalova pravidla:

$$\lim_{t \rightarrow 4} \frac{t - \sqrt{3t + 4}}{4 - t}.$$

(ii) Určete následující limitu (jakýmkoliv způsobem):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) + x.$$

(iii) Určete následující limitu (jakýmkoliv způsobem):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{3}{x^2}}.$$

(iv) Určete limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x},$$

kde $\lfloor x \rfloor$ označuje dolní celou část reálného čísla x . Nestačí limitu uhádnout, je třeba výsledek nějak dokázat (třeba přímo z definice limity).

Řešení:

(i) Po vynásobení čitatele i jmenovatele výrazem $t + \sqrt{3t + 4}$ dostaneme

$$\lim_{t \rightarrow 4} \frac{t - \sqrt{3t + 4}}{4 - t} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{t^2 - (3t + 4)}{(4 - t)(t + \sqrt{3t + 4})} = - \lim_{t \rightarrow 4} \frac{t + 1}{t + \sqrt{3t + 4}} = -\frac{5}{8}.$$

(ii) Po úpravě použijeme L'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) + x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^3}} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2(1+x^2)} = 0.$$

(ii) Po úpravě

$$\left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{3}{x^2}} = e^{\ln \left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{3}{x^2}}} = e^{\left[\frac{3}{x^2} \ln \left(\frac{x}{\sin x} \right) \right]}$$

upravíme exponent použitím L'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln \left(\frac{x}{\sin x} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{\sin x \cdot \sin x - x \cos x}{\sin^2 x}}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x}.$$

Následně je třeba ještě dvakrát použít L'Hospitalovo pravidlo, limita vyjde $\frac{1}{2}$, takže výsledek je \sqrt{e} .

(iv) Lehce se uhádne, že $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$, což dokážeme přímo z definice. Tedy pro libovolné $\epsilon > 0$ potřebujeme najít $M \in \mathbb{R}$ takové, že $x \geq M$ implikuje $1 - \epsilon < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} < 1 + \epsilon$. Zjevně $\frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1$; pro zvolené ϵ tedy chceme $\frac{\lfloor x \rfloor}{x} > 1 - \epsilon$ pro dostatečně velké x . Jelikož $\lfloor x \rfloor = x - a$ pro $a \in [0, 1)$, chceme

$$\frac{\lfloor x \rfloor}{x} = \frac{x - a}{x} > 1 - \epsilon$$

neboli ekvivalentně $\frac{a}{x} < \epsilon$. Toto jistě platí pro $x \geq M := \frac{1}{\epsilon}$.