4. domácí úkol – MIN201 – jaro 2021 – odevzdat do **24.5.2021**

(i) Mějme nevlastní integrál

$$I = \int_1^\infty x^{3b-1} e^{-x^b} dx.$$

Určete, pro které hodnoty parametru $b \in \mathbb{R}$ tento integrál konverguje a pro taková b integrál spočtěte.

(ii) V rovině xy uvažme oblast A ohraničený křivkami $x = y^2 - 4$ a $x = 6 - 3y$. Dále uvažme těleso B v $\mathbb{R}^3$, které vznikne rotací oblasti A kolem osy $y = -8$ v rovině xy. Načrtněte oblast A a spočtěte objem tělesa B.

Řešení:

(i) Integrál zjevně diverguje pro $b = 0$. Pro $b \neq 0$ udělejme substituci $y = x^b$, tj.

$$dy = bx^{b-1}dx, \quad dx = \tfrac{1}{b}\tfrac{1}{x^{b-1}}dy = \tfrac{1}{b}y^{\frac{-b+1}{b}}dy.$$

Přepočet mezí integrálu nyní závisí na znaménku parametru b. Pro $b > 0$ dostaneme

$$I = \int_1^\infty x^{3b-1}e^{-x^b}dx = \int_1^\infty \tfrac{1}{b}y^{\frac{3b-1}{b}}y^{\frac{-b+1}{b}}e^{-y}dy = \tfrac{1}{b}\int_1^\infty y^2e^{-y}dy.$$

Tento integrál lze dopočítat metodou per partes (aplikovanou dvakrát), vyjde $I = \frac{5}{be}$. Pro $b < 0$ dostanem jiný přepočet mezí integrálu,

$$I = \int_1^\infty x^{3b-1}e^{-x^b}dx = \tfrac{1}{b}\int_1^0 y^2e^{-y}dy = -\tfrac{1}{b}\int_0^1 y^2e^{-y}dy.$$

Dále použijeme metodu per partes (dvakrát) podobně jako v předchozím případě, výsledek je $I = \frac{1}{b}(\frac{5}{e} - 2)$.

(ii) Oblast A je zespoda ohraničena parabolou $y = -\sqrt{x+4}$ a seshora parabolou $y = \sqrt{x+4}$ nalevo od osy y a přímkou $y = -\frac{1}{3} + 2$ a přímkou $y = -\frac{1}{3}x + 2$ napravo od osy y. Hraniční body jsou $[-4, 0]$, $[0, 2]$ a $[21, -5]$.

Rotaci kolem osy $y = -8$ převedeme na rotaci kolem osy $y = 0$ tím, že oblast A posuneme na oblast A' ohraničenou zespodu křivkou $y = -\sqrt{x+4}+8$ a seshora křivkou $y = \sqrt{x+4}+8$ a přímkou $y = -\frac{1}{3}x + 10$. Hraniční body pak budou $[-4, 8]$, $[0, 10]$ a $[21, 3]$ a integraci rozdělíme na intervaly $[-4, 0]$ a $[0, 21]$. Objem rotační plochy vzniklé rotací oblasti A' kolem osy $y = 0$ spočteme jako $V = V_1 + V_2$, kde sčítanec

$$V_1 = \pi \int_{-4}^0 (\sqrt{x+4}+8)^2dx - \pi\int_{-4}^0(-\sqrt{x+4}+8)^2dx$$

odpovídá intervalu $[-4, 0]$ a sčítanec

$$V_2 = \pi\int_0^{21}(-\frac{1}{3}x+10)^2dx - \pi\int_0^{21}(-\sqrt{x+4}+8)^2dx$$

odpovídá intervalu $[0, 21]$. Dále dopočítáme

$$V_1 = 32\pi \int_{-4}^{0} \sqrt{x+4}\, dx = \frac{8^3}{3}\pi \quad \text{a} \quad V_2 = \frac{1145}{2}\pi.$$

Tedy celkem $V_1 + V_2 = \frac{4459}{6}\pi$.