# 5. domácí úkol – MIN201 – jaro 2021 – odevzdat do **1.6.2021**

Na prostoru spojitých reálných funkcí na intervalu $[0, e-1]$ uvažme obvyklý skalární součin, který je pro dvě takové funkce $f$ a $g$ vztahem $\langle f, g\rangle = \int_0^{e-1} f(x)g(x)\,dx$. Dále položme

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + a\ln(x+1), \quad a \in \mathbb{R},$$

kde $a$ je parametr.

(i) Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ se minimalizuje velikost funkce $f$.

(ii) Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ jsou na sebe funkce $f(x)$ a $f(x) - 1$ kolmé.

**Řešení:**

(i) Přímým výpočtem ověříme, že

$$||f(x)||^2 = \int_0^{e-1} f^2(x)dx = \int_0^{e-1} \Big(\frac{1}{x+1} + a\ln(x+1)\Big)^2 dx = (e-2)a^2 + a + 1 - \frac{1}{e},$$

tj. velikost je $\sqrt{(e-2)a^2 + a + 1 - \frac{1}{e}}$. Chápeme-li to jako kvadratickou funkci závisející na $a$, její minimum najdeme pro $a = -\frac{1}{2(e-2)}$.

(ii) Přímý výpočet dává

$$\langle f, f+1\rangle = \int_0^{e-1} (f^2(x) + f(x))dx = (e-2)a^2 + a + 1 - \frac{1}{e} - (a+1) = (e-2)a^2 - \frac{1}{e}.$$

Tento výraz je nulový pro $a = \pm\frac{1}{\sqrt{e(e-2)}}$.