3. domácí úloha z MIN401, jaro 2022

Definice. Nechť G je svaz a A je podmnožina G. Řekneme, že A je *ideál svazu* G, pokud pro každé $a, b \in A$ platí $a \vee b \in A$, a navíc pro každé $c \in A$ a každé $x \in G$ platí, že pokud $x \leq c$, tak potom $x \in A$.

Definice. *Izomorfismus uspořádaných množin* je bijektivní zobrazení $f\colon (P, \leq_P) \to (Q, \leq_Q)$ takové, že $x \leq_P y$ právě tehdy, když $f(x) \leq_Q f(y)$.

Zadání. Nechť $(\mathcal{J}, \subseteq)$ je uspořádaná množina všech ideálů svazu $(\mathbb{Q}, \leq)$, které nejsou tvaru $\{c \in \mathbb{Q} \mid c \leq b\}$ pro žádné $b \in \mathbb{Q}$. Ukažte, že uspořádaná množina $(\mathcal{J}, \subseteq)$ je izomorfní uspořádané množině $(\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}, \leq)$.

Řešení. Množinu $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ označme jako $\mathbb{R}'$. Pro $b \in \mathbb{Q}$ označme I_b množinu $\{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq b\}$.

Buď $f(x) = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < x\}$. Ukážeme, že f zadává izomorfismus mezi $(\mathbb{R}', \leq)$ a $(\mathcal{J}, \subseteq)$.

- f skutečně zadává zobrazení mezi zadanými množinami

  $f(x)$ je uzavřená na spojení, neboť $a \vee b = \max(a, b)$. Je li $y \leq c \in f(x)$, potom $y < x$ a $y \in f(x)$. $f(x)$ je ideál.

  Chceme ještě ukázat, že $f(x) \neq I_b$ pro všechna b. Je-li $x \leq b$, potom $x \notin f(x)$, avšak $x \in I_b$. Je-li $x > b$, potom existuje $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $b < q < x$. $q \in f(x)$ avšak $q \notin I_b$.

  $f(x)$ je ideál, který není tvaru I_b.
- f je injektivní

  Pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}'$, $x \neq y$, búno $x < y$, existuje $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $x < q < y$. $f(x) \neq f(y)$, neboť $q \notin f(x)$, $q \in f(y)$ a f je tudíž injektivní.
- f je surjektivní

  Buď I je libovolný ideál z $\mathcal{J}$ a $x = \sup I \in \mathbb{R}'$.

  Toto supremum jistě existuje. Je-li $I = \emptyset$, potom $\sup I = -\infty$. Je-li I neomezená shora, $\sup I = \infty$. Jinak je I neprázdná a omezená shora a z axiomů reálných čísel má tudíž supremum.

  Buď $y \in f(x)$ libovolné. Pokud by y bylo větší než všechny prvky I, bylo by horní závorou I menší než x, což by byl spor s $x = \sup I$. Existuje tedy $a \in I, y \leq a$ a z vlastností ideálů je $y \in I$.

  Je-li $y \in I$, potom $y < \sup I = x$ a $y \in f(x)$.

  Máme $f(x) \subseteq I, f(x) \supseteq I$, a tedy $f(x) = I$. f je surjektivní.
- f je izomorfismus (zachovává uspořádání)

  Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}'$ chceme ukázat $x \leq y \iff f(x) \subseteq f(y)$.

  $x \leq y \implies f(x) \subseteq f(y)$:

  Je-li $x \leq y$, potom pro všechna $a \in \mathbb{Q}$ platí $a \leq x \implies a \leq y$ a tudíž $a \in f(x) \implies a \in f(y)$.

  $x \leq y \impliedby f(x) \subseteq f(y)$ ukážeme obměnou, tj. $x > y \implies f(x) \not\subseteq f(y)$:

  Je-li $y < x$, existuje $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $y < q < x$. $q \notin f(y)$ a $q \in f(x)$, a tudíž $f(x) \not\subseteq f(y)$

$\square$