

4. domácí úloha z MIN401, jaro 2022

Zadání. Určete všechna $a \in \mathbb{Z}$ taková, že polynom $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax - 4$ má alespoň jeden racionální kořen.

Výsledek. Všechna taková $a \in \mathbb{Z}$ jsou $a \in \{-83, -8, 4, 19\}$.

Důkaz. Racionální kořen x zadaného polynomu musí být tvaru p/q , kde p dělí 4 a q dělí 1. Celkem tedy racionální kořeny mohou nabývat pouze hodnot $\{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$. Všechny tyto hodnoty x jsou nenulové a můžeme tedy z rovnosti $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax - 4 = 0$ vyjádřit

$$a = \frac{-x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4}{x}.$$

Dosazením hodnot 1, -1, 2, -2, 4, -4 do tohoto vyjádření za proměnnou x dostaneme následující hodnoty a :

$$4, -8, -8, -8, -83, 19.$$

□