Řady funkcí

Taylorova řada

Petr Liška

Masarykova univerzita

13.05.2022

Taylorova a Maclaurinova řada

Raději si připomeňme: Na intervalu I s krajními body x a x_0

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

kde

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\nu), \quad \text{kde} \quad \nu \in I, \nu \neq x, x_0\,.$$

Definice

Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

nazýváme *Taylorovou řadou* funkce f v bodě x_0. Je-li $x_0 = 0$, mluvíme o *Maclaurinově řadě*.

Věta

Nechť funkce f má v nějakém bodě x_0 derivace všech řádů. Pak platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

na intervalu I, $x_0 \in I$, právě tehdy, když pro posloupnost $\{R_n(x)\}$ zbytků platí $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ pro všechna $x \in I$.

Věta

Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I derivace všech řádů a nechť existuje $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ takové, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ a $\forall x \in I$ platí $\left|f^{(n)}(x)\right| < k$. Pak pro $\forall x_0 \in I$ platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Maclaurinovy řady elementární funkcí

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, r = \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, r = \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, r = \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, r = 1$$