

Řady funkcí

Mocninné řady

Petr Liška

Masarykova univerzita

06.05.2022

Základní otázky o funkčních řadách jsou:

1. Je součtem řady spojitých funkcí na intervalu I také funkce spojitá na intervalu I ?
2. Pro která x můžeme mocninou řadu derivovat člen po členu?
3. Pro která x můžeme mocninou řadu integrovat člen po členu?

Bodová konvergence

Definice

Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí na intervalu I a $x_0 \in I$ je libovolné. Je-li číselná posloupnost $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$, říkáme, že posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je *konvergentní v bodě* x_0 .

Řekneme, že posloupnost funkcí *bodově konverguje k funkci* $f(x)$ *na intervalu* I , jestliže konverguje v každém bodě $x \in I$.

$$(\forall x \in I)(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

Nekonečná řada funkcí

Definice

Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu I .
Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

nazýváme *nekonečnou řadou funkcí*. Posloupnost $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x),$$

nazýváme *posloupností částečných součtů* řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Jestliže posloupnost částečných součtů $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje pro všechny $x \in I$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *bodově konverguje* na intervalu I a funkci

$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ nazýváme *součtem řady* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Stejněměrná konvergence

Definice

Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně* k funkci $f(x)$ na intervalu I , jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a všechna $x \in I$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Píšeme $f_n \rightrightarrows f$ na I .

Definice

Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na intervalu* I ke svému součtu $s(x)$, jestliže posloupnost $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ jejich částečných součtů stejnoměrně konverguje na I k funkci $s(x)$.

Jak to poznat?

Věta (Weirstrassovo kritérium)

Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí na I . Nechť existuje posloupnost nezáporných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}$ konverguje a platí

$$|f_n(x)| \leq a_n \quad \text{po všechna } x \in I \quad \text{a } n \in \mathbb{N}.$$

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu I .

Proboha proč?

Věta

Nechť posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje na intervalu I k funkci f . Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojité na I , je i $f(x)$ spojitá na I .

Věta

Nechť řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu I a má součet $s(x)$. Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojité na I , pak je i $s(x)$ spojitá na I .

Mocninné řady

Definice

Bud' $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel a x_0 libovolné reálné číslo. *Mocninnou řadou* se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n rozumíme řadu funkcí tvaru

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat, že středem mocninné řady je číslo $x_0 = 0$, jelikož pomocí substituce $x - x_0 = y$ můžeme převést řadu se středem v bodě x_0 na řadu se středem v bodě 0.

Poloměr konvergence

Věta

Nechť $\sum a_n x^n$ je mocninná řada a nechť $a = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Je-li $a = 0$, pak řada absolutně konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Je-li $a = \infty$, pak řada diverguje pro všechna $x \neq 0$.

Je-li $0 < a < \infty$, pak řada absolutně konverguje pro $|x| < \frac{1}{a}$ a diverguje pro $|x| > \frac{1}{a}$.

Je-li $0 < a < \infty$, pak se číslo $r = \frac{1}{a}$ nazývá *poloměr konvergence* a interval $(-r, r)$ se nazývá *konvergenční interval*. *Oborem konvergence* pak rozumíme tento interval, případně tento interval s jeho krajními body, pokud zde řada konverguje.

Existuje-li limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$, pak má mocninná řada $\sum a_n x^n$ poloměr konvergence

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Mohou nastat tři možnosti:

1. Je-li $0 < r < \infty$, pak řada konverguje pro $x \in (-r, r)$ a diverguje pro $|x| > r$. Pro hodnoty $x = \pm r$ musíme rozhodnout zvlášť pomocí některého z kritérií konvergence pro číselné řady.
2. Je-li $r = \infty$, pak řada konverguje pro všechna x .
3. Je-li $r = 0$, pak řada diverguje pro všechna $x \neq 0$ a říkáme, že řada vždy diverguje.

Věta

Nechť $r > 0$ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum a_n x^n$. Pak tato řada stejnoměrně konverguje na každém uzavřeném intervalu $[-\rho, \rho]$ intervalu $(-r, r)$.

Věta

Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence $r > 0$. Pak součet této řady je spojitá funkce na intervalu $(-r, r)$.

Věta

Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence $r > 0$. Pak pro všechna $x \in (-r, r)$ platí

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

a

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \int_0^x (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Přitom výrazy na pravé straně mají stejný poloměr konvergence.

Taylorova a Maclaurinova řada

Definice

Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

nazýváme *Taylorovou řadou* funkce f v bodě x_0 . Je-li $x_0 = 0$, mluvíme o *Maclaurinově řadě*.

Věta

Nechť funkce f má v nějakém bodě x_0 derivace všech řádů. Pak platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

na intervalu I , $x_0 \in I$, právě tehdy, když pro posloupnost $\{R_n(x)\}$ zbytků platí $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ pro všechna $x \in I$.