

Nekonečné řady

Jak poznat, že konvergují?

Petr Liška

Masarykova univerzita

22.04.2022

Posloupnosti

Definice

Posloupnost je funkce definovaná na množině $M \subseteq \mathbb{N}$. Posloupnost označujeme $\{a_n\}$ nebo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, n -tý prvek označujeme nejčastěji a_n .

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *limitu* L , jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *limitu* ∞ , jestliže ke každému $M \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ platí $a_n > M$.

Pokud takováto limita existuje, říkáme, že posloupnost *konverguje*. Má-li posloupnost limitu ∞ nebo $-\infty$, říkáme, že *diverguje*. Jestliže posloupnost nekonverguje ani nediverguje, řekneme, že *osciluje*.

Číselná řada

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{nebo} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

nazýváme *nekonečnou číselnou řadou*. Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \dots \quad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad \dots,$$

nazýváme *posloupnost částečných součtů* této řady.

Existuje-li vlastní limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* a má součet s . Neexistuje-li vlastní limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, řekneme, že

řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje*.

Pravidla pro počítání s nekonečnými řadami

Věta

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní řady a necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = u$

a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = v$. Pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = u + v.$$

Věta

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak pro libovolné $k \in \mathbb{R}$ konverguje též

řada $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ a platí $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Naopak konverguje-li řada

$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$, kde $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Asociativní zákon

Věta

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada a necht' $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Položme $n_0 = 0$ a pro $k \in \mathbb{N}$ označme

$$b_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}.$$

Pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje a platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Kritéria konvergence

Věta (Nutná podmínka konvergence)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Věta (Integrální kritérium)

Nechť funkce f je kladná a klesající na intervalu $[1, \infty)$. Nechť $a_n = f(n)$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Věta (Srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a necht' $a_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom platí: konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; diverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, diverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta (Limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a necht' existuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Je-li $L < \infty$ a konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Je-li $L > 0$ a diverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta (Limitní podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy a necht' existuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Je-li $q < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, je-li $q > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta (Limitní odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy a necht' existuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \quad \text{kde } q \in \mathbb{R}^*.$$

Je-li $q < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a je-li $q > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.