Nekonečné řady

Jak poznat, že konvergují? (podruhé)

Petr Liška

Masarykova univerzita

29.04.2022

Dokončení z minula - Další odhad zbytku

Věta

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je číselná řada, pro kterou platí*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \leq 1$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. *Pak pro zbytek* R_n *této řady platí*

$$|R_n| \leq |a_n| \frac{q}{1-q} \, .$$

Alternují řady aneb když nutná je i dostatečná

Definice

Nekonečná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá *alternující*, právě když platí

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Alternují řady aneb když nutná je i dostatečná

Definice

Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá *alternující*, právě když platí

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Věta (Leibnitzovo kritérium)

Nechť a_n je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Pak alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguje právě tehdy, když platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Poslední odhad zbytku

Věta

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je nerostoucí posloupnost kladných čísel taková, že* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Pak pro zbytek* R_n *alternující řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *platí*

$$|R_n| < a_{n+1}\,.$$

Absolutní konvergence

Věta

Konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *pak konverguje i řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Absolutní konvergence

Věta

Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *pak konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definice

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje neabsolutně.*

Kritéria konvergence

Věta

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je konvergentní řada s nezápornými členy a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s libovolnými členy. Jestliže pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $|a_n| \leq b_n$*, pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně.*

Kritéria konvergence

Věta

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *je konvergentní řada s nezápornými členy a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s libovolnými členy. Jestliže pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $|a_n| \leq b_n$*, pak řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně.*

Věta

Existuje-li $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \in \mathbb{R}^{\star}$*, pak v případě* $q < 1$ *řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně a v případě* $q > 1$ *řada diverguje.*

Kritéria konvergence

Věta

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je konvergentní řada s nezápornými členy a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s libovolnými členy. Jestliže pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $|a_n| \leq b_n$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně.*

Věta

Existuje-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \in \mathbb{R}^\star$, *pak v případě* $q < 1$ *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně a v případě* $q > 1$ *řada diverguje.*

Věta

Existuje-li $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q \in \mathbb{R}^\star$, *pak v případě* $q < 1$ *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně a v případě* $q > 1$ *řada diverguje.*

Přerovnání řad

Definice

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada, $\{k_n\}$ permutace množiny $\mathbb{N}$. Pak říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ vznikla *přerovnáním* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Přerovnání řad

Definice

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada, $\{k_n\}$ permutace množiny $\mathbb{N}$. Pak říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ vznikla *přerovnáním* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Pak konverguje absolutně také každá řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ vzniklá přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} .$$

Hodně překvapivý výsledek

Věta (Riemann)

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje neabsolutně a nechť* $s \in \mathbb{R}$ *je libovolné. Pak existuje takové přerovnání řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = s$, *takové přerovnání, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ *určitě diverguje a takové přerovnání, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{q_n}$ *osciluje.*