Aplikace Riemannova integrálu

Hlavně geometrické

Petr Liška

Masarykova univerzita

25.03.2022

Geometrické aplikace v $\mathbb{R}^2$

Definice

Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je nezáporná funkce, kde a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Podgrafem* funkce f na intervalu $[a,b]$ rozumíme množinu

$$S(f;a,b) = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\right\} .$$

Věta

Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je nezáporná a integrovatelná funkce. Obsah S podgrafu funkce f je dán určitým integrálem

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta

Nechť je funkce f integrovatelná na intervalu $[a, b]$. Obsah plochy ohraničené grafem funkce f, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x je dán určitým integrálem

$$S = \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x \, .$$

Věta

Nechť funkce f a g jsou integrovatelné na intervalu $[a, b]$. Obsah plochy ohraničené grafy funkcí f, g a přímkami $x = a$, $x = b$ je dán určitým integrálem

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x \, .$$

Věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a,b]$ se spojitou derivací f' na intervalu (a,b). Potom délka l grafu funkce f na intervalu $[a,b]$ je dána určitým integrálem

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Geometrické aplikace v $\mathbb{R}^3$

Věta

Nechť funkce f je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$. Pak objem tělesa v $\mathbb{R}^3$, které vznikne rotací podgrafu funkce f kolem osy x, je dán určitým integrálem

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta

Nechť je funkce f spojitá a nezáporná pro $x \in [a, b]$, kde $0 \leq a$. Pak objem tělesa v $\mathbb{R}^3$, které vznikne rotací podgrafu funkce f kolem osy y, je dán určitým integrálem

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Objem i pro nekulatá tělesa - naivní přístup

Nechť T je těleso v $\mathbb{R}^3$, které leží mezi rovinami $x = a$ a $x = b$. Nechť $A(x)$ je obsah řezu tělesa T rovinou, která je kolmá na osu x. Je-li $A(x)$ spojitá funkce, potom objem tělesa T je

$$V = \lim_{\nu(D)\to 0} i(D, A, V) = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta

Nechť f je nezáporná funkce mající spojitou derivaci na intervalu $[a,b]$. Pak obsah pláště tělesa v $\mathbb{R}^3$, které vznikne rotací podgrafu funkce f kolem osy x, je dán určitým integrálem

$$S_{pl} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Těžiště rovinného obrazce

Věta

Nechť f je spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a, b]$ a M je množina tvořená jejím podgrafem. Je-li množina M pokrytá rovnoměrně hmotou o konstantní hustotě, potom těžištěm množiny M je bod T o souřadnicích $[\bar{x}, \bar{y}]$, kde

$$\bar{x} = \frac{\int\limits_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Pappova-Guldinova věta

Věta

Nechť $\mathcal{R}$ je část roviny o obsahu A, která leží celá v jedné polorovině určené přímkou l. Objem tělesa, které vznikne rotací množiny $\mathcal{R}$ kolem přímky l, je roven součinu obsahu A a vzdálenosti d, kterou urazí těžiště množiny $\mathcal{R}$.

Ještě jednou a parametricky

Nyní budeme místo funkce f a jejího grafu uvažovat tzv. *křivku zadanou parametricky* rovnicemi

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]. \tag{1}$$

Věta

Mějme křivku zadanou parametricky rovnicemi (1), *přičemž* φ *a* ψ *jsou spojitě diferencovatelné a platí* $\varphi'(t) \neq 0$ *pro všechna* $t \in (\alpha, \beta)$. *Potom obsah plochy vymezené zadanou křivkou, přímkami* $x = \varphi(\alpha)$, $x = \varphi(\beta)$ *a osou* x *je dán určitým integrálem*

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) |\varphi'(t)| \, \mathrm{d}t \, .$$

Věta

Nechť C je křivka s parametrizací (1). Mají-li funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ spojitou derivaci na intervalu $[\alpha, \beta]$, má křivka konečnou délku a platí

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Věta

Nechť je rovinná křivka daná rovnicemi (1), přičemž φ a ψ jsou spojitě diferencovatelné a platí $\psi(t) \neq 0$ pro všechna $t \in [\alpha, \beta]$. Pak objem, resp. obsah pláště, tělesa v $\mathbb{R}^3$, které vznikne rotací plochy ohraničené danou křivkou a přímkami $x = \varphi(\alpha)$, $x = \varphi(\beta)$ kolem osy x je dán určitým integrálem

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t)|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t, \quad \textit{resp.} \quad S_{pl} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$