

Odsud až do nekonečna

Nevlastní integrál

Petr Liška

Masarykova univerzita

08.04.2022

Definice

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a necht' f je funkce definovaná na intervalu $[a, \infty)$, která je integrovatelná na každém intervalu $[a, b]$, kde $b > a$. Definujme funkci F na intervalu $[a, \infty)$ vztahem

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Jestliže existuje vlastní limita $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b)$, říkáme, že *nevlastní integrál*

$\int_a^{\infty} f(x) dx$ *konverguje* a klademe

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Neexistuje-li vlastní limita $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b)$ říkáme, že nevlastní integrál *diverguje*.

Několik poznámek

- Je-li limita $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b)$ nevlastní, říkáme, že integrál určitě diverguje. V případě, že tato limita neexistuje, říkáme, že integrál osciluje.

- Nevlastní integrál $\int_{-\infty}^a f(x) dx$, kde $a \in \mathbb{R}$, definujeme analogicky

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a f(x) dx.$$

- Je-li funkce f definovaná na \mathbb{R} a integrovatelná na každém omezeném intervalu, řekneme, že nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ konverguje, jestliže pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ konvergují oba nevlastní integrály $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ a $\int_a^{\infty} f(x) dx$. V tomto případě klademe

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx.$$

Prosté srovnávací kritérium

Věta

Nechť funkce f , g splňují pro $x \in [a, \infty)$ nerovnosti $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

(i) Konverguje-li integrál $\int_a^{\infty} g(x) dx$, konverguje i integrál $\int_a^{\infty} f(x) dx$ a platí

$$0 \leq \int_a^{\infty} f(x) dx \leq \int_a^{\infty} g(x) dx .$$

(ii) Diverguje-li integrál $\int_a^{\infty} f(x) dx$, diverguje i integrál $\int_a^{\infty} g(x) dx$.

Limitní srovnávací kritérium

Věta

Nechť funkce f , g jsou nezáporné na $[a, \infty)$ a necht' existuje

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

(i) Je-li $L < \infty$ a konverguje-li integrál $\int_a^{\infty} g(x) dx$, konverguje i integrál $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

(ii) Je-li $L > 0$ a diverguje-li integrál $\int_a^{\infty} g(x) dx$, diverguje i integrál $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

Definice

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a necht' f je funkce definovaná na intervalu $[a, b)$. Řekneme, že b je *singulární bod* funkce f , jestliže f je ohraničená na každém intervalu $[a, b - \varepsilon]$, kde $0 < \varepsilon < b - a$, není ohraničená na intervalu $[b - \varepsilon, b]$ a je integrovatelná na každém intervalu $[a, b - \varepsilon]$.

Definice

Nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a, b)$ a necht' b je jejím singulárním bodem. Necht' funkce F je definovaná na intervalu $[a, b)$ předpisem $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Existuje-li vlastní limita $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$, řekneme,

že nevlastní integrál $\int_a^b f(x) dx$ konverguje a platí

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Neexistuje-li vlastní limita $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$, říkáme, že integrál diverguje.