Riemannův určitý integrál

Jak a proč?

Petr Liška

Masarykova univerzita

18.03.2022

Metody výpočtu určitého integrálu

Věta (Metoda per-partes pro určité integrály)

Nechť funkce u a v mají derivaci na intervalu $[a,b]$ a nechť funkce u' a v' jsou integrovatelné na $[a,b]$. Pak platí

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta (Substituční metoda pro určité integrály)

Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[c,d]$. Nechť funkce φ má derivaci na intervalu $[a,b]$, která (ta derivace) je na tomto intervalu integrovatelná a nechť $\varphi([a,b]) \subseteq [c,d]$. Pak platí

$$\int\limits_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Numerická integrace

Lichoběžníkové pravidlo

Nechť je funkce $f \in C[a,b]$. Rozdělme interval na n subintervalů délky h a krajní body těchto intervalů označme po řadě $x_0, x_1, \dots, x_n$ a jim odpovídající funkční hodnoty funkce f po řadě $y_0, y_1, \dots, y_n$. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)\,.$$

Simpsonovo pravidlo

Nechť je funkce $f \in C[a,b]$. Rozdělme interval na $n = 2k$ subintervalů délky h a krajní body těchto intervalů označme po řadě $x_0, \dots, x_n$ a jim odpovídající funkční hodnoty funkce f po řadě $y_0, \dots, y_n$. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)\,.$$