Riemannův integrál

Integrální počet počtvrté

Petr Liška

Masarykova univerzita

11.03.2022

Dělení intervalu

Definice

Nechť a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Dělením* intervalu $[a, b]$ rozumíme každou konečnou množinu $D \subseteq [a, b]$ navzájem různých bodů takovou, že a, $b \in D$.

- $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
- x_k – dělící body
- $[x_{k-1}, x_k]$ – dělící intervaly
- $\nu(D) = \max\{x_k - x_{k-1} : k = 1, \dots, n\}$ – norma dělení
- $\mathcal{D}([a, b])$ – množina všech dělení intervalu

Dolní/horní součet

Definice

Nechť funkce f je ohraničená na intervalu $[a,b]$ a uvažujme dělení $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{D}([a,b])$. Označme

$$m_k = \inf\{f(x)\colon x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \qquad M_k = \sup\{f(x)\colon x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

pro $k = 1, \dots, n$. Položme

$$s(D,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}), \qquad S(D,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Číslo $s(D,f)$ nazýváme *dolní součet* a číslo $S(D,f)$ nazýváme *horní součet* funkce f při dělení D.

Věta

Nechť f je ohraničená funkce na intervalu $[a, b]$ a nechť c, $d \in \mathbb{R}$, $c \leq f(x) \leq d$ pro každé $x \in [a, b]$. Pak pro libovolná dělení D_1, $D_2 \in \mathcal{D}([a, b])$ platí

$$c(b-a) \leq s(D_1, f) \leq S(D_2, f) \leq d(b-a).$$

Dolní/horní integrál

Definice

Nechť f je ohraničená funkce na intervalu $[a, b]$. Pak klademe

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{s(D, f)\colon D \in \mathcal{D}([a, b])\right\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\left\{S(D, f)\colon D \in \mathcal{D}([a, b])\right\}.$$

Číslo $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ nazýváme *dolním integrálem*, číslo $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ *horním integrálem* funkce f přes interval $[a, b]$.

Riemannův integrál

Definice

Nechť f je ohraničená funkce na intervalu $[a, b]$. Jestliže platí rovnost

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

řekneme, že funkce f je *integrovatelná* na intervalu $[a, b]$. V tomto případě definujeme její *Riemannův integrál* přes interval $[a, b]$ vztahem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Platí-li $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, říkáme, že funkce f *není integrovatelná* na $[a, b]$.

Alternativní (Riemannův) přístup

Definice

Posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$ nazveme *nulovou* posloupnost dělení, jestliže platí $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$.

Definice

Nechť $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je dělení intervalu $[a, b]$ a nechť $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ je libovolné číslo pro $k = 1, \dots, n$. Množinu $V = \{c_1, \dots, c_n\}$ nazveme *výběrem reprezentantů dělení* D.

Definice

Nechť f je ohraničená funkce na intervalu $[a, b]$, zvolme dělení $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{D}([a, b])$ a výběr reprezentantů $V = \{c_1, \dots, c_n\}$ tohoto dělení. Číslo

$$i(D, f, V) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

nazýváme *integrálním součtem* funkce f při dělení D a výběru V.

Lemma

Nechť f je ohraničená funkce na intervalu $[a, b]$. Pak pro každé dělení $D \in \mathcal{D}([a, b])$ a každý výběr V při dělení D platí

$$s(D, f) \leq i(D, f, V) \leq S(D, f)\,.$$

Definice

Nechť f je ohraničená funkce. Řekneme, že f je na intervalu $[a, b]$ integrovatelná, jestliže existuje číslo I takové, že

$$\lim_{\nu(D)\to 0} i(D, f, V) = I$$

a hodnota této limity nezávisí na výběru reprezentantů V dělení D, tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolné dělení D s normou $\nu(D) < \delta$ a libovolný výběr reprezentantů dělení D platí

$$|i(D, f, V) - I| < \varepsilon.$$

Pak definujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I.$$

Kdy je funkce integrovatelná?

Lemma

Nechť f je ohraničená funkce na intervalu $[a,b]$. Pak je f integrovatelná na $[a,b]$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení $D \in \mathcal{D}([a,b])$ tak, že platí

$$S(D,f) - s(D,f) < \varepsilon.$$

Věta

Nechť funkce f je monotónní na intervalu $[a,b]$. Pak je f na intervalu $[a,b]$ integrovatelná.

Věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a,b]$. Pak je f na intervalu $[a,b]$ integrovatelná.

Věta

Nechť f je ohraničená na intervalu $[a,b]$ a má na tomto intervalu konečný počet bodů nespojitosti, pak je f na intervalu $[a,b]$ integrovatelná.

Věta

Nechť funkce f, g jsou ohraničené na intervalu $[a,b]$ a liší se na tomto intervalu pouze v konečném počtu bodů. Pak je f integrovatelná na $[a,b]$, právě když je zde integrovatelná funkce g a platí

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Základní vlastnosti Riemannova integrálu

Věta

Nechť f je integrovatelná na $[a, b]$.

- *Nechť c, $d \in \mathbb{R}$ a $c \leq f(x) \leq d$ pro $\forall x \in [a, b]$. Pak platí*

$$c(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq d(b-a).$$

- *Je-li $f(x) \geq 0$ pro $x \in [a, b]$, pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.*
- *Funkce $|f|$ je integrovatelná na $[a, b]$ a platí*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Věta

Nechť funkce f *a* g *jsou integrovatelné na* $[a,b]$ *a* $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. *Pak také funkce* $\alpha f + \beta g$ *je integrovatelná na* $[a,b]$ *a platí*

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta

Nechť f, g *jsou integrovatelné na* $[a,b]$ *a platí* $f(x) \leq g(x)$ *pro* $x \in [a,b]$. *Pak je*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Věta

Nechť funkce f je integrovatelná na $[a,b]$ a nechť $[c,d] \subseteq [a,b]$. Pak je f integrovatelná i na intervalu $[c,d]$.

Věta

Nechť a, b, $c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$ a f je integrovatelná na každém z intervalů $[a,c]$ a $[c,b]$. Pak je f integrovatelná na $[a,b]$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Střední hodnota funkce

Věta

Nechť f je integrovatelná na $[a, b]$. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\inf\{f(x)\colon x \in [a, b]\} \leq c \leq \sup\{f(x)\colon x \in [a, b]\}$$

a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c(b-a)\,.$$

Je-li f navíc spojitá na $[a, b]$, pak existuje $x_0 \in [a, b]$ tak, že $c = f(x_0)$.

Číslo

$$c = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

se nazývá *střední hodnota* funkce f na intervalu $[a, b]$.

Integrál jako funkce horní meze

Nechť funkce f je integrovatelná na $[a, b]$, pak je integrovatelná na intervalu $[a, x]$, kde $a < x \leq b$. Můžeme tedy definovat funkci F na intervalu $(a, b]$ předpisem

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{$\star$}$$

Tuto definici můžeme rozšířit i na bod a tak, že položíme $F(a) = 0$ kdykoliv, kdy je funkce f v bodě a definovaná.

Věta

Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu $[a, b]$. Pak je funkce F definovaná předpisem $(\star)$ spojitá na intervalu $[a, b]$.

Věta

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak funkce F definovaná vztahem $(\star)$ má derivaci na intervalu $[a, b]$ a platí $F' = f(x)$ pro každé $x \in [a, b]$, přičemž v krajních bodech tohoto intervalu se zde rozumí existence příslušných derivací.

Konečně!

Věta (Newtonova-Leibnizova formule)

Nechť f je integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a nechť F je funkce, která je na $[a, b]$ spojitá a na (a, b) primitivní k funkci f. Pak platí

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$