Dvojný a trojný integrál

Zuzana Došlá, Petr Liška

11. května 2022

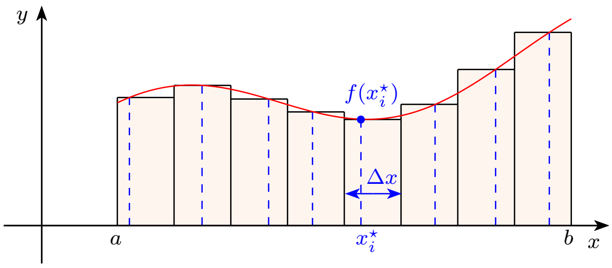
1 Dvojný integrál

1.1 Riemannův určitý integrál - opakování

Při zavedení určitého integrálu funkce jedné proměnné vycházíme z geometrického významu: integrál je číslo vyjadřující **obsah rovinného obrazce**, který je ohraničený danou funkcí na intervalu $[a, b]$.

Nechť f je ohraničená funkce na intervalu $[a, b]$. Určitý (Riemannův) integrál funkce jedné proměnné lze zavést pomocí tzv. Riemannových součtů:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\,\Delta x, \quad \text{kde} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$



Daný integrál existuje, existuje-li limita na pravé straně. V tom případě říkáme, že funkce je integrovatelná na intervalu $[a, b]$.

Je-li funkce spojitá na intervalu $[a, b]$, pak je integrovatelná. Příkladem funkce, která není integrovatelná, je Dirichletova funkce (její hodnota je v racionálních bodech 1 a v iracionálních 0).

Pro výpočet Riemannova integrálu platí Newton-Leibnizův vztah

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

kde $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na $[a, b]$.

1.2 Dvojný integrál na obdélníku

Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$ je definovaná a ohraničená obdélníku

$$R = [a,\, b] \times [c,\, d] = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\; c \le y \le d\right\}.$$

Míra obdélníku je jeho velikost, tj.

$$m(R) = (b-a)(d-c)\,.$$

Dělení obdélníku

Rozdělíme oba intervaly

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d.$$

Dostaneme tak obdélníky $R_1, \ldots, R_k$, kde $k = m \cdot n$. *Dělení obdélníka* R je pak množina

$$\mathcal{D} = \{R_1, \ldots, R_k\}\ .$$

Norma dělení je číslo

$$\nu(\mathcal{D}) = \max\{d_1, \ldots, d_k\}\,,$$

kde d_i je velikost úhlopříčky obdélníka R_i.

Nyní máme dvě možnosti, jak zavést dvojný integrál.

Zavedení dolních a horních součtů

Nechť $\mathcal{D}$ je pevně zvolené dělení obdélníka R. Označme

$$\alpha_i = \inf_{(x,y)\in R_i} f(x,y), \qquad \beta_i = \sup_{(x,y)\in R_i} f(x,y),$$

kde $i = 1, \ldots, k$. Poznamenejme, že taková α_i a β_i existují, protože funkce f je ohraničená.

Definujme dolní a horní součty funkce příslušné danému dělení $\mathcal{D}$ obdélníka R

$$s(f,\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i m(R_i), \qquad S(f,\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i m(R_i)\,.$$

Zřejmě platí

$$s(f,\mathcal{D}) \le S(f,\mathcal{D})\,.$$

Zvolme nulovou posloupnost dělení $\{\mathcal{D}_n\}_{n=1}^{\infty}$ obdélníku R, tj. takovou posloupnost, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \nu\left(\mathcal{D}_n\right) = 0\,.$$

Pro každé dělení D_n označme příslušný dolní součet $s_n(f,\mathcal{D}_n)$ a horní součet $S_n(f,\mathcal{D}_n)$. Zřejme platí, že posloupnost $\{s_n(f,\mathcal{D}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající a shora ohraničená, existuje tedy její limita

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f,\mathcal{D}_n) =: \underline{\iint}_{R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Podobně posloupnost $\{S_n(f,\mathcal{D}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí a zdola ohraničená a její limita je

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f,\mathcal{D}_n) =: \overline{\iint}_{R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Definice 1.1. Jestliže

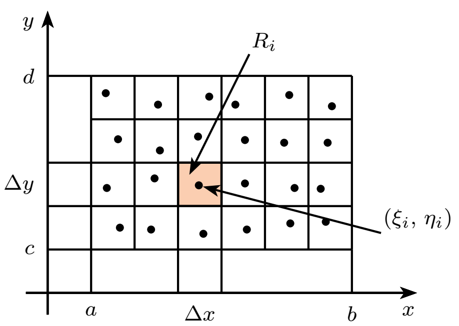
$$\underline{\iint}_{R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \overline{\iint}_{R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

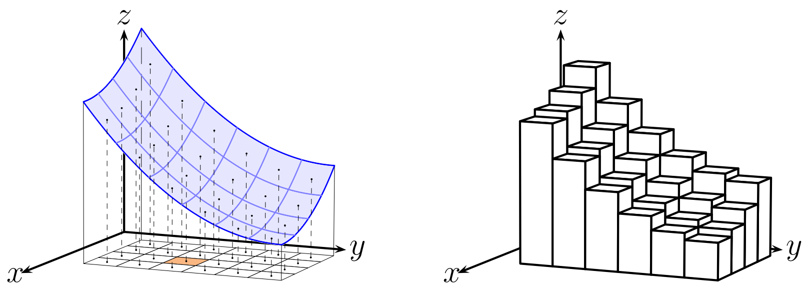
říkáme, že funkce $f(x,y)$ je integrovatelná na obdélníku R. Dvojný integrál této funkce na obdélníku R je

$$\iint_R f(x,y) =: \underline{\iint}_{R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \overline{\iint}_{R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Zavedení integrálních součtů

Je dáno dělení $\mathcal{D} = \{R_1, \ldots, R_k\}$ obdélníku R. V každém dělícím obdélníčku zvolme bod $T_i = [\xi_i, \eta_i]$, $i = 1, \ldots, k$. Označme $V = \{T_1, \ldots, T_k\}$ výběr reprezentantů příslušný dělení $\mathcal{D}$.





(a) (b)

K zavedení integrálních součtů

Integrální součet příslušný funkci f, dělení $\mathcal{D}$ a výběru reprezentantů V definujeme jako

$$\varphi(f, \mathcal{D}, V) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i, \eta_i) m(R_i)\,.$$

Definice 1.2. Nechť f je definovaná a ohraničená na obdélníku R. Řekneme, že funkce f je integrovatelná na R, jestliže existuje číslo I s následující vlastností: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ takové, že pro všechna dělení $\mathcal{D}$ obdélníka R, jehož norma $\nu(\mathcal{D}) < \delta$, a pro libovolný výběr reprezentantů V tohoto dělení platí

$$|I - \varphi(f, \mathcal{D}, V)| < \varepsilon.$$

Číslo I nazýváme dvojným integrálem funkce f na R a píšeme

$$\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I\,.$$

Kdy dvojný integrál existuje?

Postačující podmínku pro integrovatelnost funkce uvádí následující věta.

Věta 1.3. *Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá na obdélníku R. Pak je na tomto obdélníku integrovatelná.*

Poznámka 1.4. Aby dvojný integrál funkce f existoval, funkce f nemusí být nutně spojitá. Stačí, aby byla na R ohraničená a nespojitá pouze na konečném počtu „hladkých křivek“.

Poznámka 1.5. Příkladem funkce, která není integrovatelná je obdoba Dirichletovy funkce: $f(x, y) = 1$ pro x a y racionální čísla, a $f(x, y) = 0$ v opačném případě (tj. x nebo y je iracionální číslo).

Jak dvojný integrál spočítat?

Věta 1.6 (Fubini)**.** *Nechť $f(x, y)$ je funkce spojitá na obdélníku $R = [a, b] \times [c, d]$ potom*

$$\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \\ = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,.$$

Poznámka 1.7. V případě, že se funkce f dá psát ve tvaru $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$, je možné výpočet zjednodušit

$$\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Příklad 1.8. Vypočtěte

$$\iint_M x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina M je obdélník s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [2, 1]$, $C = [2, 2]$ a $D = [0, 2]$.

Řešení: Vidíme, že platí $0 \le x \le 2$ a $1 \le y \le 2$. Podle Fubiniho věty pak dostáváme

$$\begin{aligned}\iint_M x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^2 \left(\int_1^2 x^2 y \,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \left[x^2 \frac{y^2}{2}\right]_1^2 \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^2 \left(2x^2 - \frac{1}{2}x^2\right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{3}{2}x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{2}\right]_0^2 = 4.\end{aligned}$$

Pokud zvolíme opačné pořadí integrace, bude výpočet vypadat takto:

$$\begin{aligned}\iint_M x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_1^2 \left(\int_0^2 x^2 y \,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y\right]_0^2 \mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{8}{3} y \,\mathrm{d}y = \\ &= \left[\frac{4}{3}y^2\right]_1^2 = \frac{16}{3} - \frac{4}{3} = 4.\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že integrační oblast je obdélník a integrovaná funkce je tvaru $f(x, y) = g(x)h(y)$, můžeme využít předchozí poznámky

$$\iint_M x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 x^2 \,\mathrm{d}x \cdot \int_1^2 y \,\mathrm{d}y = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 = \frac{8}{3} \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 4.$$

Příklad 1.9. Vypočtěte objem tělesa, které leží pod plochou $z = 4 - x^2 - y^2$ a nad čtvercem s vrcholy $[-1, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, 1]$, $[1, -1]$.

Řešení: Objem tělesa je dán integrálem

$$\iint_M \left(4 - x^2 - y^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je zadaný čtverec, tj. $-1 \le x \le 1$ a $-1 \le y \le 1$. Podle Fubiniho věty tak dostáváme

$$\begin{aligned}\iint_M \left(4 - x^2 - y^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \left(4 - x^2 - y^2\right) \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \left[4y - x^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^1 \mathrm{d}x = \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{26}{3} - 2x^2\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{26}{3}x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^1 = 16\end{aligned}$$

1.3 Dvojný integrál na měřitelné množině

Nyní rozšíříme definici dvojného integrálu funkce dvou proměnných na tzv. měřitelné množině. Jednoduše řečeno, je to taková množina, které lze přiřadit velikost neboli *míru.*

Měřitelná množina

Obdélník má míru (velikost) rovnu součinu velikostí jeho stran a je nejjednodušším případem měřitelné množiny. Pro libovolnou množinu nejprve definujeme charakteristickou funkci a její míru jako integrál z této charakteristické funkce na obdélníku, v němž je daná množina obsažena.

Definice 1.10. Nechť M je ohraničená množina v rovině. *Charakteristická funkce množiny* M je daná předpisem

$$\chi_M(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } (x, y) \in M \\ 0 & \text{pro } (x, y) \notin M. \end{cases} \tag{1}$$

Množina M je *měřitelná*, jestliže existuje obdélník R takový, že $M \subset R$ a charakteristická funkce χ_M množiny M je integrovatelná na tomto obdélníku. Její míru (obsah) definujeme

$$m(M) = \iint_R \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Tato míra se nazývá *Jordanova míra množiny M*.

Definice míry je korektní. Dá se ukázat, že velikost míry nezáleží na volbě obdélníku R, který danou množinu obsahuje.

Věta 1.11. *Pro Jordanovu míru platí*

a) $m(\emptyset) = 0$,

b) $m(M) \geq 0$ *pro libovolnou měřitelnou množinu* M,

c) Jestliže M_1, M_2 *jsou měřitelné množiny, pak také* $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2$ *a* $M_1 \setminus M_2$ *jsou měřitelné.*

d) Nechť $y = g(x)$, $x \in [a, b]$, *je spojitá funkce. Pak graf této funkce je měřitelná množina a její míra je nula.*

Množina měřitelných množin tvoří okruh vzhledem k rozdílu a konečnému sjednocení a průniku množin.

Věta 1.12. *Jsou-li* M_1 *a* M_2 *měřitelné množiny, pak platí*

$$m(M_1 \cup M_2) = m(M_1) + m(M_2) - m(M_1 \cap M_2).$$

Zejména, jsou-li M_1 *a* M_2 *disjunktní, pak*

$$m(M_1 \cup M_2) = m(M_1) + m(M_2). \tag{2}$$

Vlastnost (2) platí pro *konečný* počet množin a nazývá se *aditivnost míry.*

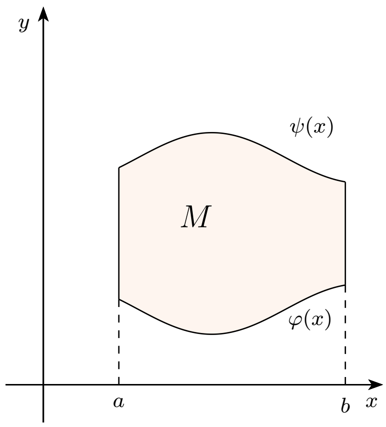
Věta 1.13. *Je-li* M *měřitelná množina, pak její hranice* $h(M)$ *je měřitelná a* $m\,(h(M)) = 0$.

Příklad 1.14. Typickým příkladem měřitelné množiny je množina daná předpisem

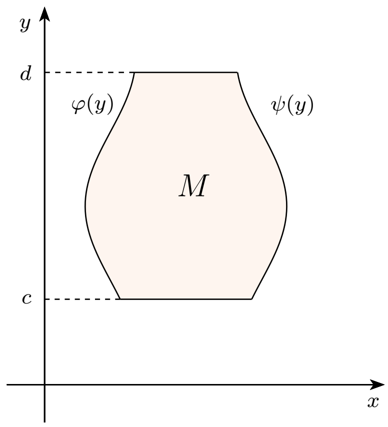
$$M = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

kde $\varphi(x)$, $\psi(x)$ jsou funkce spojité na intervalu $[a,\, b]$, viz obrázek (a).

Záměnou proměnných dostáváme množinu znázorněnou na obrázku (b).



(a)



(b)

Těmto množinám říkáme *elementární množiny.*

Zavedení dvojného integrálu na měřitelné množině

Máme-li zavedenou míru v rovině, můžeme definovat dvojný integrál na měřitelné množině pomocí dvojného integrálu jisté funkce na obdélníku, který danou množinu obsahuje.

Definice 1.15. Nechť f je funkce ohraničená na měřitelné množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Nechť R je obdélník, který obsahuje množinu M, tj. $M \subset R$. Jestliže je funkce g určená předpisem

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,\,y) & \text{pro } (x,y) \in M \\ 0 & \text{pro } (x,y) \notin M \end{cases}$$

integrovatelná na obdélníku R, pak funkci f nazveme *integrovatelnou* na množině M. *Dvojný integrál funkce f na množině M* definujeme vztahem

$$\iint_M f(x,\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R g(x,\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Podobně jako u definice míry lze ukázat, že definice dvojného integrálu je korektní, tj. integrál nezávisí na volbě obdélníku R.

Podobně jako u dvojného integrálu na obdélníku platí, že funkce, která je spojitá na měřitelné množině, je na této množině integrovatelná.

Jak dvojný integrál vypočteme?

Věta 1.16 (Fubini)**.** *Nechť $\varphi(x)$, $\psi(x)$ jsou funkce spojité na intervalu $[a,\,b]$ a nechť $f(x,y)$ je funkce spojitá na množině*

$$M = \{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, \quad \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}.$$

Pak

$$\iint_M f(x,\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,\,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\,.$$

Analogicky, jsou-li $\varphi(y)$, $\psi(y)$ funkce spojité na intervalu $[c,\,d]$ a $f(x,y)$ je funkce spojitá na množině

$$M = \{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d, \quad \varphi(y) \le x \le \psi(y)\},$$

pak

$$\iint_M f(x,\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,\,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,.$$

Vlastnosti dvojného integrálu

Věta 1.17. *Nechť funkce f a g jsou integrovatelné na M a $c \in \mathbb{R}$. Pak platí*

a) funkce $f+g$ je integrovatelná na M a

$$\iint_M f(x,y) + g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_M g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

b) funkce $c \cdot f$ je integrovatelná na M a

$$\iint_M c \cdot f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c \cdot \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

c) Je-li navíc $f(x,y) \le g(x,y)$ pro $\forall (x,y) \in M$, pak

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \iint_M g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Věta 1.18. *Nechť M je měřitelná množina. Pak*

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = m(M)\,.$$

Věta 1.19. *Je-li f ohraničená na množině M a $m(M)=0$, pak f je integrovatelná na M a*

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Následující vlastnost nám umožňuje integrovat funkci $f(x,\,y)$ i přes množinu, která není elementární množinou, ale dá se na elementární množiny rozdělit.

Věta 1.20. *Nechť $f(x,\,y)$ je funkce integrovatelná na konečném počtu uzavřených elementárních množin $M_1,\,M_2,\,\ldots,\,M_n$, které mají společné nejvýše hraniční body a nechť $M=M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_n$. Pak platí*

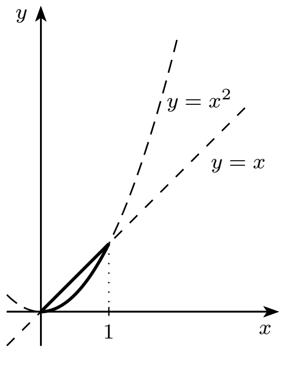
$$\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{M_1} f(x,\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{M_2} f(x,\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \cdots + \int_{M_n} f(x,\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Příklad 1.21. Vypočtěte

$$\iint_M (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina M je ohraničena křivkami $y=x^2$, $y=x$.

Řešení: U příkladů tohoto typu je dobré si nakreslit ilustrační obrázek, abychom mohli popsat množinu přes kterou integrujeme pomocí nerovností a dostali tak meze našeho integrálu.



Vidíme, že pro množinu M platí

$$0 \le x \le 1, \qquad\qquad x^2 \le y \le x\,.$$

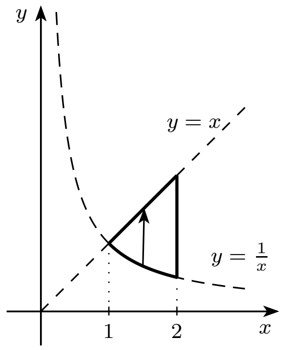
Podle Fubiniho věty dostaneme

$$\iint_M (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} (x+y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{x^4}{4}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{20}\right] = \frac{1}{5}$$

Příklad 1.22. Vypočtěte

$$\iint_M \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina M je ohraničená křivkami $y=x$, $x=2$ a $xy=1$.



Řešení: Z obrázku vidíme, že platí $1 \leq x \leq 2$ a $\frac{1}{x} \leq y \leq x$, přičemž souřadnici $x = 1$ jsem dostali z řešení rovnice $\frac{1}{x} = x$. Integrovaná funkce je na oblasti M spojitá. Podle Fubiniho věty dostáváme

$$\iint_M \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y} \right]_{\frac{1}{x}}^{x} \mathrm{d}x =$$

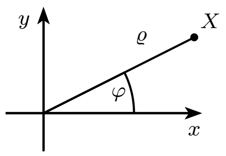
$$= \int_1^2 \left(-x + x^3 \right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right]_1^2 = \frac{9}{4}.$$

1.4 Transformace dvojného integrálu

Při výpočtu dvojného integrálu často používáme transformaci integrálu do polárních souřadnic ϱ, φ. Tuto metodu použijeme, jestliže množina M, přes kterou integrujeme, je ohraničená kružnicí (částí kružnice, mezikružím).

Transformace množiny do polárních souřadnic

Nechť bod v rovině má kartézské souřadnice $[x, y]$. Pak polární souřadnice ϱ je vzdálenost bodu od počátku a φ úhel, který svírá *průvodič* (tj. úsečka spojující bod s počátkem) s kladným směrem osy x. Odtud plynou rovnice transformace pro převod kartézských souřadnic do polárních:



$$x = \varrho \cos \varphi,$$
$$y = \varrho \sin \varphi.$$

Například, kruh o poloměru r je v polárních souřadnicích popsán $\varrho = r$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Podobně polopřímka $y = x$ pro $x \geq 0$ je popsána $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varrho \geq 0$.

Příklad 1.23. Znázorněte množinu, která je zapsaná v polárních souřadnicích:

$$2 \leq \varrho \leq 4, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Řešení: Jde o mezikruží ohraničené kružnicemi se středem v počátku a poloměry $r = 2$, $r = 4$ a omezené přímkami $y = x$ a $x = 0$ (tj. osa y).

Při transformaci integrálu do polárních souřadnic hraje důležitou roli determinant

$$\mathcal{J}(u, v) = \begin{vmatrix} x_\varrho & y_\varrho \\ x_\varphi & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\varrho\sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho\cos^2\varphi + \varrho\sin^2\varphi = \varrho.$$

Tento determinant se nazývá *jakobián* zobrazení pro převod kartézských souřadnic do polárních.

Transformace integrálu do polárních souřadnic

Jestliže při výpočtu dvojného integrálu použijeme pro vyjádření množiny M polární souřadnice ϱ, φ, pak daný integrál transformujeme do polárních souřadnic, kde se objeví jakobián, a po té použijeme Fubiniovu větu. Tento postup můžeme popsat následujícím způsobem:

Věta 1.24. *Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na množině M a nechť je tato množina určená v polárních souřadnicích nerovnostmi*

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad \varrho_1(\varphi) \leq \varrho \leq \varrho_2(\varphi).$$

Pak platí

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_{\varrho_1(\varphi)}^{\varrho_2(\varphi)} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi.$$

Příklad 1.25. Vypočtěte

$$\iint_M (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je kruh $x^2+y^2 \leq 9$.

Řešení: Nejprve popíšeme množinu M v polárních souřadnicích. Rovnice $x^2+y^2=9$ určuje kružnici se středem v počátku a poloměrem 3. V polárních souřadnicích tak dostáváme

$$0 \leq \varrho \leq 3, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Nyní podle věty 1.24 dostaneme

$$\iint_M (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 \varrho^2(\cos\varphi - \sin\varphi)\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}\varrho^3\right]_0^3 (\cos\varphi - \sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= 9\int_0^{2\pi} (\cos\varphi - \sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 9\left[\sin\varphi + \cos\varphi\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Příklad 1.26. Vypočtěte

$$\iint_M \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde oblast M je čtvrtinou kruhu $x^2+y^2 \leq 1$ ležící v prvním kvadrantu.

Řešení: Nejprve zapíšeme množinu M v polárních souřadnicích

$$0 \leq \varrho \leq 1, \qquad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Připomeňme, že platí

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

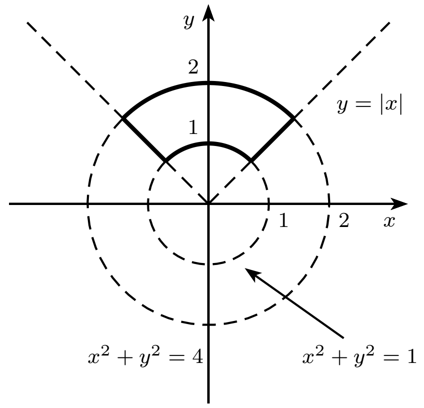
Podle věty 1.24 dostaneme

$$\iint_M \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \varrho\sqrt{1-\varrho^2(\sin^2 x + \cos^2 x)}\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \varrho\sqrt{1-\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 \varrho\sqrt{1-\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho =$$
$$= \left| \begin{array}{c} 1-\varrho^2 = t \\ -2\varrho\,\mathrm{d}\varrho = \mathrm{d}t \\ 1 \rightsquigarrow 0, 0 \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| = \left[\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^0 \frac{-1}{2}\sqrt{t}\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_1^0 = \frac{\pi}{6}.$$

Příklad 1.27. Vypočtěte

$$\iint_M \left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde pro oblast M platí $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$, $y \geq |x|$.



Řešení: Nejprve vyjádříme množinu M v polárních souřadnicích. Tato množina je část mezikruží, která je ohraničená přímkami

$$y = x \quad \text{a} \quad y = -x.$$

Popsat mezikruží umíme, jak můžeme popsat dané přímky? Jedna z možností je přímo, z názorného významu polárních souřadnic, tj. $y = x$ je $\varphi = \frac{\pi}{4}$ a $y = -x$ je $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Druhá možnost je pomocí dosazení transformačních rovnic a řešení příslušné goniometrické rovnice. Například pro $y = x$, dostáváme $\cos\varphi = \sin\varphi$ a odtud $\varphi = \frac{\pi}{4}$. V polárních souřadnicích tak můžeme množinu M popsat nerovnostmi:

$$1 \le \varrho \le 2, \qquad \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}.$$

Pro daný integrál platí

$$\begin{aligned}\iint_M \left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_1^2 \varrho^3(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_1^2 \varrho^3\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_1^2 \cdot \left[\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{15}{8}\pi.\end{aligned}$$

Obecná transformace integrálu

Nyní podrobněji popíšeme transformaci dvojného integrálu. Tu lze provést nejen pro polární souřadnice, ale pro libovolnou „pěknou“ transformaci. Příkladem je zobrazení, které transformuje rovnoběžník na obdélník (takové zobrazení je lineární), nebo zobrazení které transformuje elipsu na obdélník. Výběr transformace se provádí podle tvaru množiny, přes kterou integrujeme (nikoliv podle funkce, kterou integrujeme, jako tomu je u jednoduchého integrálu).

Definice 1.28. Nechť je dáno zobrazení $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ určené rovnicemi

$$x = k(u,v), \quad y = l(u,v), \tag{3}$$

kde funkce k a l mají spojité parciální derivace prvního řádu. Pak F se nazývá *spojitě diferencovatelné zobrazení* a determinant

$$\mathcal{J}(u,v) = \begin{vmatrix} k_u & l_u \\ k_v & l_v \end{vmatrix}$$

se nazývá *jakobián* zobrazení F. Jestliže $\mathcal{J}(u,v) \ne 0$, pak se toto zobrazení nazývá *regulární*.

Například, lineární zobrazení $x = au + bv$, $y = cu + dv$ má jakobián $J = ad - bc$. Toto zobrazení je regulární, jestliže $ad \ne bc$. Toto zobrazení při vhodné volbě konstant transformuje rovnoběžník v rovině xy na obdélník v rovině uv.

Věta 1.29. *Nechť je dána spojitá funkce f proměnných x a y na množině M dané vztahem* (3). *Nechť $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je prosté regulární zobrazení zadané rovnicemi* (3) *a nechť $M = F(B)$. Pak platí*

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_B f[k(u,v),l(u,v)]|\mathcal{J}(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Příklad 1.30. Určete obsah rovnoběžníku M:

$$x \le y \le x+1, \qquad 2x-2 \le y \le 2x. \tag{4}$$

Řešení: Označme nové proměnné

$$u = y-x, \qquad v = y-2x. \tag{5}$$

Pak z (4) dostaneme

$$0 \le u \le 1, \qquad -2 \le v \le 0,$$

což je obdélník o stranách 1 a 2 a má velikost $m(B) = 2$.

Z (5) dostaneme

$$x = u - v, \qquad y = 2u - v.$$

Jakobián tohoto zobrazení je

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Podle věty 1.29 platí

$$m(M) = \iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_B \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = m(B) = 2.$$

1.5 Aplikace dvojného integrálu

Z definice dvojného integrálu plynou geometrické aplikace:

- obsah množiny M v rovině

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- objem tělesa omezeného obecnou válcovou plochou tvořenou hranicí M a funkcí $f(x,\,y)$

$$\iint_M f(x,\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Příklad 1.31. Určete obsah kruhu o poloměru R.

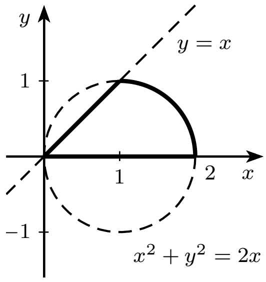
Řešení: Pro určení daného obsahu musíme spočítat $\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde množina M je tvořena daným kruhem. Kvůli jednoduchosti umístíme kruh do počátku a množinu M popíšeme v polárních souřadnicích, dostaneme tak $0 \le \varrho \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Pro daný integrál tedy máme

$$m(M) = \iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \varrho\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^R \varrho\,\mathrm{d}\varrho = [\varphi]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^R = \pi R^2\,.$$

Příklad 1.32. Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného kružnicí $x^2+y^2 = 2x$ a přímkami $y = x$, $y = 0$.

Řešení: Hledaný obsah bude určen integrálem $\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je množina určená daným obrazcem. Upravíme-li doplněním na úplný čtverec rovnici $x^2+y^2 = 2x$, dostaneme

$$(x-1)^2 + y^2 = 1,$$



což je rovnice kružnice se středem v bodě $[1, 0]$ a poloměrem 1. Dosadíme-li za $x = \varrho \cos\varphi$ a za $y = \varrho \sin\varphi$ z transformačních rovnic, dostaneme pro danou kružnici rovnici $\varrho^2 \cos^2\varphi + \varrho^2 \sin\varphi = 2\varrho\cos\varphi$ a po úpravě $\varrho = 2\cos\varphi$. Dané přímky mají rovnice $\varphi = 0$ a $\varphi = \frac{\pi}{4}$, máme tak popis množiny M

$$0 \le \varrho \le 2\cos\varphi, \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}.$$

Připomeňme, že platí

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Podle věty 1.24 dostáváme

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\cos\varphi} \varrho\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\varrho^2\right]_0^{2\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

Další aplikace

Průměrné hodnoty funkcí:

- průměrná hodnota funkce $f(x, y)$ na množině M o obsahu $m(M)$ (znečištění ovzduší, hustota populace atd.)

$$f_{ave} = \frac{1}{m(M)} \iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Fyzikální aplikace:

- hmotnost desky o tvaru M a hustotě $\varrho(x, y)$

$$m = \iint_M \varrho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- stacionární moment desky o tvaru M kolem osy x (M_x) a kolem osy y (M_y)

$$M_x = \iint_M y\varrho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad M_y = \iint_M x\varrho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- souřadnice $[\bar{x}, \bar{y}]$ těžiště desky o tvaru M, hmotnosti m a hustotě $\varrho(x, y)$

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_M x\varrho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_M y\varrho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- moment setrvačnosti desky o tvaru M a hustotě $\varrho(x, y)$ okolo osy x a okolo osy y

$$I_x = \iint_M y^2\varrho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad I_y = \iint_M x^2\varrho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- moment setrvačnost desky o tvaru M a hustotě $\varrho(x,\, y)$ okolo počátku (polární moment)

$$I_0 = \iint_M (x^2 + y^2)\varrho(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Další aplikace závisí na významu funkce $f(x,\, y)$ a tedy na významu objemu, který vyjadřuje dvojný integrál. Dvojný integrál se též dá využít k určení součtu řad nebo jednoduchých integrálů, u kterých neznáme primitivní funkci.

2 Trojný integrál

Podobně jako jsme v předcházející kapitole integrovali funkci dvou proměnných na množině v rovině, budeme se nyní zabývat integrací funkce tří proměnných na množině v prostoru – *trojným integrálem.*

Nejprve zavedeme trojný integrál na kvádru a pak tento integrál rozšíříme na libovolnou měřitelnou množinu, přičemž se postupuje analogicky jako při zavedení dvojného integrálu. Ukážeme si alespoň definici trojného integrálu na kvádru a formulaci Fubiniovy věty pro speciální případy měřitelných množin.

2.1 Trojný integrál na kvádru

Uvažme funkci $f(x, y, z)$ definovanou a ohraničenou na kvádru

$$V = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq g\}\,.$$

Míra kvádru je jeho objem, tj.

$$m(V) = (g - e)(d - c)(b - a).$$

Tento kvádr rozdělíme na menší kvádříky tak, že interval $[a, b]$ rozdělíme na l subintervalů, podobně rozdělíme i další intervaly na m a n subintervalů.

Roviny rovnoběžné se souřadnicovými rovinami, které jdou koncovými body těchto subintervalů, rozdělí kvádr na $p = l \cdot m \cdot n$ kvádříků V_i, $i = 0, \ldots, p$. Tímto dostaneme dělení daného kvádru, za normu tohoto dělení nám poslouží největší tělesová úhlopříčka kvádru V_i.

Utvoříme sumu

$$\varphi(f, \mathcal{D}, V) = \sum_{i=1}^{p} f(x_i^\star, y_i^\star, z_i^\star) m(V_i)$$

kde $(x_i^\star, y_i^\star, z_i^\star)$ je libovolný bod z kvádříku V_i. Tato suma tvoří integrální součet příslušný funkci f, danému dělení a výberu reprezentantů.

Definice 2.1. Nechť f je definovaná a ohraničená na obdélníku V. Řekneme, že funkce f je integrovatelná na V, jestliže existuje číslo I s následující vlastností: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ takové, že pro všechna dělení $\mathcal{D}$ kvádru V, jehož norma $\nu(\mathcal{D}) < \delta$, a pro libovolný výběr reprezentantů V tohoto dělení platí

$$|I - \varphi(f, \mathcal{D}, V)| < \varepsilon.$$

Číslo I nazýváme trojným integrálem funkce f na V a píšeme

$$\iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = I\,.$$

Pro výpočet trojného integrál na kvádru máme opět Fubiniovu větu.

Věta 2.2 (Fubini)**.** *Nechť funkce $f(x, y, z)$ je spojitá na kvádru (trojrozměrném intervalu) $V = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$. Pak trojný integrál je*

$$\iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \left\{ \int_c^d \left(\int_e^g f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x.$$

Poznámka 2.3. Když jsme počítali dvojný integrál přes obdélník, nezáleželo na pořadí v jakém integrujeme. Podobně, integrujeme-li přes kvádr, nezáleží při integraci na pořadí v jakém integrujeme.

Příklad 2.4. Pomocí trojného integrálu odvoďte objem kvádru $m(V)$ o velikosti stran a, b a c.

Řešení: Podle definice je objem množiny roven trojnému integrálu přes tuto množinu, tj.

$$m(V) = \iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde množina V je kvádr, pro který platí $0 \le x \le a$, $1 \le y \le b$ a $0 \le z \le c$. Podle Fubiniovy věty je trojný integrál roven trojnásobnému integrálu

$$\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^a \left\{ \int_0^b \left(\int_0^c \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \int_0^a \left\{ \int_0^b c\,\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \int_0^a bc\ \mathrm{d}x = abc.$$

Příklad 2.5. Vypočtěte trojný integrál

$$\iiint_V (x+y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde množina V je krychle, pro kterou platí $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$ a $0 \le z \le 1$.

Řešení: Opět použijeme Fubiniovu větu 2.2, přičemž meze trojnásobného integrálu jsou zřejmé ze zadání.

$$\begin{aligned}\iiint_V (x+y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \left\{ \int_1^2 \left(\int_0^1 (x+y)\ \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_1^2 (x+y)\,[z]_0^1\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 \left(\int_1^2 (x+y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_1^2 \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 \left(2x + 2 - x - \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x + \frac{3}{2} \right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \right]_0^1 = 2.\end{aligned}$$

2.2 Fubiniova věta pro trojný integrál

Nyní budeme integrovat přes měřitelnou množinu v prostoru, neboli přes "deformovaný"kvádr.

Věta 2.6 (Fubini)**.** *Nechť je dána množina v rovině*

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \colon\ a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\},$$

kde $\varphi(x)$, $\psi(x)$ jsou spojité funkce na intervalu $[a,b]$ a $\varphi(x) \le \psi(x)$, a množina v prostoru

$$V\ = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \colon\ [x,y] \in M,\ \Phi(x,y) \le z \le \Psi(x,y)\},$$

kde $\Phi(x,y)$, $\Psi(x,y)$ jsou spojité funkce na množině M a $\Phi(x,y) \le \Psi(x,y)$.

Je-li funkce $f(x,y,z)$ spojitá na množině V v prostoru, pak platí

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x.$$

Jinými slovy, trojný integrál převedeme na trojnásobný integrál „od bodu k bodu“, „od funkce k funkci“ a „od plochy k ploše“. Postupně integrujeme podle z, pak podle y a nakonec podle x.

Příklad 2.7. Vypočtěte trojný integrál

$$\iiint_V xz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde pro množinu V platí $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x$ a $0 \le z \le \sqrt{x+y}$.

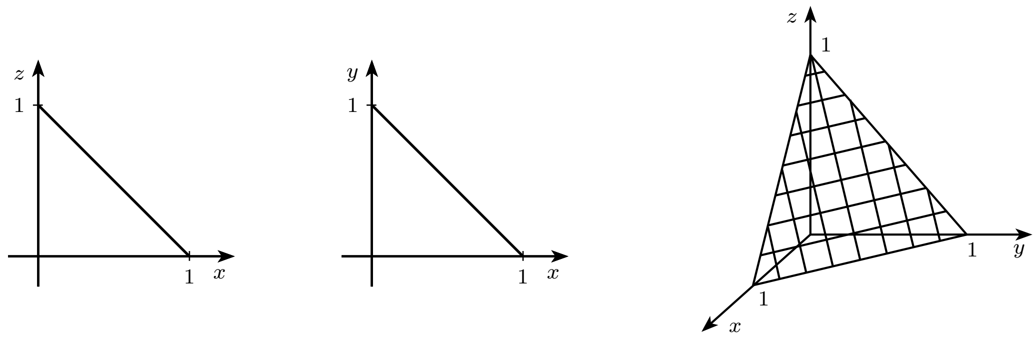
Řešení: Můžeme rovnou použít Fubiniovu větu 2.6 a daný integrál přepsat jako trojnásobný

$$\iiint_V xz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^2 \left\{ \int_0^x \left(\int_0^{\sqrt{x+y}} xz\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\int_0^x \left[xz^2 \right]_0^{\sqrt{x+y}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\int_0^x (x^2 + xy)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{xy^2}{2} \right]_0^x \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(x^3 + \frac{x^3}{2} \right) \mathrm{d}x = \frac{3}{4} \int_0^2 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 3.$$

Příklad 2.8. Vypočtěte

$$\iiint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde množina V je ohraničena rovinami $x + y + z = 1$, $z = 0$, $y = 0$ a $x = 0$.



(a) (b) (c)

Řešení: Při výpočtu trojného integrálu, kdy daná množina není dána nerovnostmi, je výhodné si nakreslit dva obrázky, jeden pro danou množinu V a jeden pro její projekci na některou ze souřadných rovin (např. rovinu xy). V tomto případě můžeme vidět, že spodní hranicí našeho tělesa je rovina $z = 0$ a horní hranicí je rovina $x + y + z = 1$, resp. $z = 1 - x - y$. Obě tyto roviny se protínají v přímce $x + y = 1$ ($y = 1 - x$), které leží v rovině xy. Projekce do roviny xy je proto trojúhelník a máme tak popis dané množiny

$$V = \{(x, y, z) \colon 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, 0 \le z \le 1 - x - y\},$$

což nám umožní vypočítat daný integrál pomocí Fubiniovy věty

$$\iiint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} z\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{1-x-y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1 - x - y)^2\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{(1 - x - y)^3}{3} \right]_0^{1-x} \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{6} \int_0^1 (1 - x)^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} \left[-\frac{(1 - x)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{24}.$$

Příklad 2.9. Pomocí trojného integrálu odvoďte objem koule o poloměru r.

Řešení: Objem koule můžeme spočítat pomocí jednoduchého integrálu jako rotaci polokružnice kolem osy x.

Nyní si ukažme, jak postupovat pomocí trojného integrálu. Rovnice koule je

$$x^2 + y^2 + z^2 \le r^2.$$

Objem koule vyjádříme jako trojný integrál, který převedeme na dvojný integrál

$$m(V) = \iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_M \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kde množina M je kruh $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$. Vzhledem k symetrii stačí uvažovat množinu v prvním oktantu (tj. množinu, která je ohraničená kulovou plochou $z = \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$ a rovinou $z = 0$ na čtvrtkružnici) a tento objem vynásobit osmi.

Pro dvojný integrál použijeme transformaci čtvrtkružnice do polárních souřadnic, tj. $0 \leq \varphi \leq \pi/4$, $0 \leq \varrho \leq r$. Objem koule je

$$m(V) = 8 \int_0^{\pi/4} \left\{ \int_0^r \sqrt{r^2 - \varrho^2}\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho \right\} \mathrm{d}\varphi,$$

a použitím substituce $t^2 = r^2 - \varrho^2$ dostáváme

$$m(V) = 8 \int_0^{\pi/4} \left\{ \int_0^r t^2 \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}\varphi = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

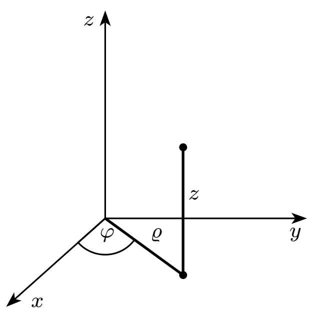
2.3 Transformace trojného integrálu do válcových souřadnic

Postupujeme podobně jako u dvojného integrálu: nejprve transformujeme těleso do válcových souřadnic a po té trojný integrál.

Transformace tělesa do válcových souřadnic

Integrujeme-li přes válec V nebo jeho část, pak místo kartézských souřadnic x, y, z je výhodné používat válcové souřadnice ϱ, φ a z.

Nechť bod v prostoru má kartézské souřadnice $[x, y, z]$. Pak válcové souřadnice jsou z (beze změny) a místo kartézských souřadnic x, y jsou polární souřadnice průmětu tohoto bodu do roviny xy. Odtud plynou rovnice transformace pro převod kartézských souřadnic do válcových:



$$x = \varrho\cos\varphi,$$
$$y = \varrho\sin\varphi,$$
$$z = z.$$

Je vidět, že válcové souřadnice transformují válec na kvádr.

Příklad 2.10. Zapište ve válcových souřadnicích následující množiny:

(a) válec s osou v ose z, poloměrem $r = 10$ a výškou $v = 100$;

(b) část koule se středem v počátku, poloměrem $r = 2$ ležící v prvním oktantu (tj. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$).

(c) kužel o poloměru r a výšce v s osou v ose z.

Řešení:

(a) Průmětem válce do roviny xy je kruh o poloměru 10. Vzhledem k tomu, že popis v této rovině provádíme pomocí polárních souřadnic a výška válce je 100, musí všechny body válce splňovat nerovnosti

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \qquad 0 \leq \varrho \leq 10, \qquad 0 \leq z \leq 100.$$

(b) Průmětem části koule do roviny xy je čtvrtkruh, který můžeme v polárních souřadnicích popsat nerovnostmi

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \le \varrho \le 2.$$

Rovnice koule o poloměru 2 a středu v počátku je v kartézských souřadnicích $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Rovnici ve válcových souřadnicích dostaneme tak, že za x a y dosadíme transformační rovnice, tj.

$$x = \varrho \cos \varphi, \qquad y = \varrho \sin \varphi,$$

máme tak

$$z = \sqrt{4 - \varrho^2}.$$

Celkem tak dostáváme popis naší množiny ve tvaru

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \le \varrho \le 2, \qquad 0 \le z \le \sqrt{4 - \varrho^2}.$$

(c) Jde o množinu popsanou v kartézských souřadnicích

$$x^2 + y^2 \le r^2, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le v.$$

Ve válcových souřadnicích

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad 0 \le \varrho \le r, \qquad \varrho \le z \le v.$$

Transformace trojného integrálu do válcových souřadnic

Pro transformaci integrálu opět potřebujeme určit jakobián zobrazení.

Jakobián zobrazení F pro převod kartézských souřadnic do válcových je determinant

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} x_\varrho & y_\varrho & z_\varrho \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \\ x_z & y_z & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\varrho \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \varrho.$$

Vidíme, že tento jakobián je stejný jako pro polární souřadnice.

3 Transformace trojného integrálu

Protože válcové souřadnice jsou analogií polárních souřadnic v rovině, postupujeme při transformaci trojného integrálu do válcových souřadnic podobně jako při transformaci dvojného integrálu.

Věta 3.1. *Nechť funkce $f(x, y, z)$ je spojitá na množině $V \subset \mathbb{R}^3$ a nechť je tato množina určená ve válcových souřadnicích nerovnostmi*

$$\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, \quad \varrho_1(\varphi) \le \varrho \le \varrho_2(\varphi), \quad \Phi(\varrho, \varphi) \le z \le \Psi(\varrho, \varphi),$$

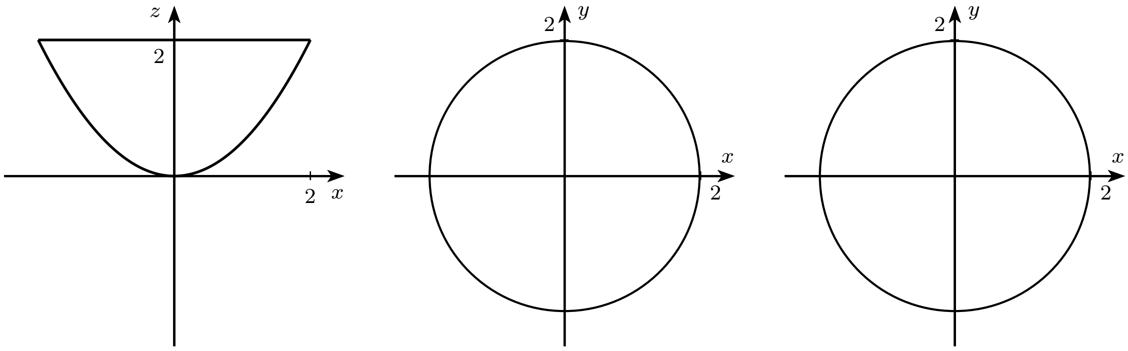
kde funkce ϱ_1, ϱ_2, $\Phi(\varrho, \varphi)$, $\Psi(\varrho, \varphi)$ jsou spojité. Pak platí

$$\iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\{ \int_{\varrho_1(\varphi)}^{\varrho_2(\varphi)} \left(\int_{\Phi(\varrho,\varphi)}^{\Psi(\varrho,\varphi)} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z)\,\varrho\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\varrho \right\} \mathrm{d}\varphi.$$

Příklad 3.2. Vypočtěte trojný integrál

$$\iiint_V \left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde pro množinu V platí $x^2 + y^2 \le 2z$ a $z \le 2$.



(a) Průmět do roviny xz (b) Průmět do roviny xy (c) Graf funkce $z = x^2 + y^2$

Obrázek 1: Množina V z příkladu 3.2

Řešení: Množina V představuje část rotačního paraboloidu $z = \frac{x^2+y^2}{2}$, který je shora seříznut rovinou $z = 2$, která je rovnoběžná s rovinou O_{xy}. Integrál transformujeme do válcových souřadnic. Řez rovinou $z = 2$ získáme dosazením do rovnice paraboloidu, máme tak $4 = x^2 + y^2$. Vidíme, že řezem je kružnice se středem v počátku a poloměrem 2, do stejné kružnice v rovině xy se promítá i dané těleso. Pro množinu V tak dostáváme ve válcových souřadnicích popis

$$0 \leq \varrho \leq 2, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \qquad \frac{\varrho^2}{2} \leq z \ \leq 2.$$

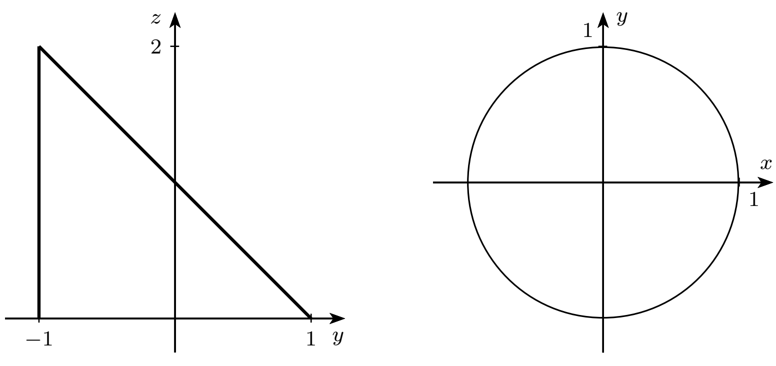
Pro daný integrál tak dostáváme

$$\begin{aligned}
\iiint_V \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^2 \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\varrho^2}{2}}^2 \varrho^3 \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\varphi \right\} \mathrm{d}\varrho = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \varrho^3 \left[z \ \right]_{\frac{\varrho^2}{2}}^2 \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\varrho = \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(2\varrho^3 - \frac{\varrho^5}{2} \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\varrho = \int_0^2 \left(2\varrho^3 - \frac{\varrho^5}{2} \right) \left[\varphi \right]_0^{2\pi} \mathrm{d}\varrho = \\
&= 2\pi \int_0^2 \left(2\varrho^3 - \frac{\varrho^5}{2} \right) \mathrm{d}\varrho = 2\pi \left[\frac{\varrho^4}{2} - \frac{\varrho^6}{12} \right]_0^2 = \frac{16\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Příklad 3.3. Vypočtěte

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

kde V je množina omezená nerovnostmi $x^2 + y^2 \leq 1$, $z \leq 1 - y$ a $z \geq 0$.



(a) Průmět do roviny yz (b) Průmět do roviny xy

Obrázek 2: Popis množiny V z příkladu 3.3

Řešení: Množina V je válec, který je seříznut rovinami $z = 0$ a $z = 1 - y$. Převodem do válcových souřadnic dostaneme $0 \leq \varrho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ a dosazením transformačních rovnic do rovnice roviny

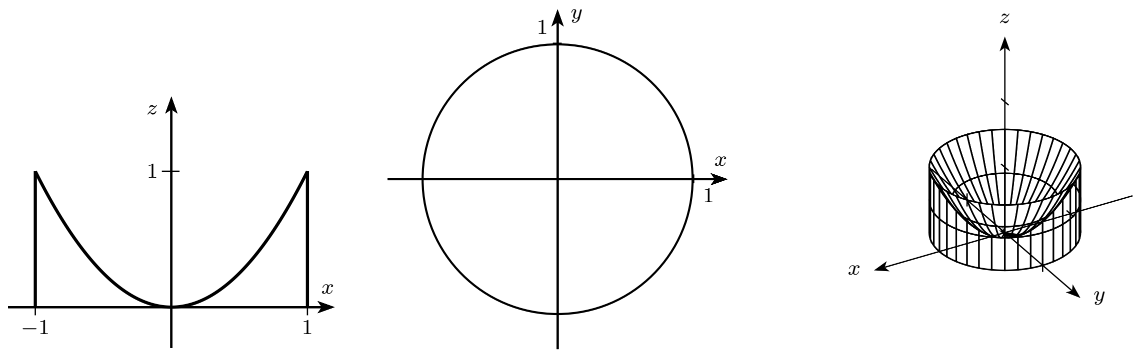
$0 \le z \le 1 - \varrho \sin\varphi$. Máme tak

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1\left(\int_0^{1-\varrho\sin\varphi} \varrho^2\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\varrho\right\}\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \varrho^2\,[z]_0^{1-\varrho\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \varrho^2(1-\varrho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{\varrho^3}{3} - \frac{\varrho^4}{4}\sin\varphi\right]_0^1 \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\sin\varphi\right)\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \left[\frac{1}{3}\varphi + \frac{1}{4}\cos\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}.$$

Příklad 3.4. Vypočtěte

$$\iiint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde pro množinu V platí $x^2+y^2 \ge z$, $x^2+y^2 \le 1$, $z \ge 0$.



(a) Průmět do roviny xz (b) Průmět do roviny xy (c) Obraz množiny V

Obrázek 3: Ilustrace množiny V z příkladu 3.4

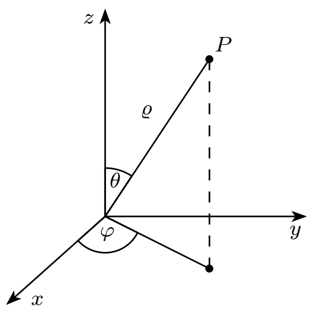
Řešení: Množina V je válec, ze kterého je „vyříznut“ kousek rotačního paraboloidu. Opět pomocí transformace do válcových souřadnic dostaneme $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\varrho \in [0, 1]$ (celé těleso je uvnitř daného válce), ve směru osy z je těleso omezené rovinou xy a daným paraboloidem, tedy $z \in [0, x^2+y^2]$ neboli $z \in [0, \varrho^2]$ po dosazení válcových souřadnic. Dostáváme tak

$$\iiint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1\left(\int_0^{\varrho^2} \varrho z\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\varrho\right\}\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \varrho\left[z^2\right]_0^{\varrho^2}\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \varrho^5\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{12}\int_0^{2\pi}\left[\varrho^6\right]_0^1\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{12}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \frac{1}{12}\,[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{6}.$$

Transformace do sférických souřadnic

Trojný integrál lze transformovat také do jiných souřadnic. Dalším typickým příkladem transformace jsou *sférické souřadnice* ϱ, φ a θ, které jsou definovány takto: Nechť bod v prostoru má kartézské souřadnice $[x, y, z]$. Pak souřadnice ϱ je vzdálenost bodu od počátku (průvodič), θ je úhel, který svírá průvodič s kladným směrem osy z, a φ úhel, který svírá průmět průvodiče do roviny xy, tj. hodnota $\varrho\sin\theta$, s kladným směrem osy x.

Znamená to, že v rovině xy máme místo kartézských souřadnic x, y polární souřadnice s průvodičem $\varrho \sin\theta$ a úhlem φ. Odtud plynou rovnice transformace pro převod kartézských souřadnic do sférických:



$$
\begin{aligned}
x &= \varrho \sin\theta \cos\varphi,\\
y &= \varrho \sin\theta \sin\varphi,\\
z &= \varrho \cos\theta.
\end{aligned}
$$

Jakobián tohoto zobrazení je $\mathcal{J} = -\varrho^2 \sin\theta$.

Příklad 3.5. Zapište ve sférických souřadnicích kouli se středem v počátku a poloměrem $r = 4$.

Řešení: Výhodou sférických souřadnice je fakt, že koule se v nich dá popsat, podobně jako kvádr v kartézských souřadnicích, pomocí nerovností s konstantními mezemi. V tomto případě budou tyto nerovnosti tvaru

$$0 \le \varrho \le 4, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

Poznámka 3.6. Podobně jako u dvojného integrálu bychom mohli formulovat větu o obecné transformaci trojného integrálu, opět je nutné integrovanou funkci při přechodu k novým souřadnicím násobit absolutní hodnotou jakobiánu této transformace.

Příklad 3.7. Vypočítejte míru množiny V, která je určená nerovnostmi

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z \le 0, \qquad x^2 + y^2 - z^2 \le 0.$$

Řešení: Pro určení míry množiny V, potřebujeme spočítat $\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. První nerovnost můžeme upravit do tvaru

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 1,$$

jedná se proto o kouli se středem v bodě $[0, 0, 1]$ a poloměrem 1. Druhá nerovnost představuje část kužele s vrcholem v počátku. Dosadíme-li do obou rovnic sférické souřadnice dostaneme

$$\varrho^2 \sin^2\theta + \varrho^2 \cos^2\theta - 2\varrho\cos\theta = 0 \quad \text{tj.} \quad \varrho = 2\varrho\cos\theta$$

$$\varrho^2 \sin^2\theta - \varrho^2\cos^2\theta = 0 \Longrightarrow \cos 2\theta = 0 \quad \text{tj.} \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Dostáváme tak integrační meze

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le \varrho \le 2\varrho\cos\theta$$

a výpočet daného integrálu je podle předchozí poznámky

$$
\begin{aligned}
\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\cos\theta} \varrho^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi \right\} \mathrm{d}\theta = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}\varrho^3 \right]_0^{2\cos\theta} \sin\theta \,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \cos^3\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\theta = \\
&= \frac{16}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = \left| \begin{array}{c} \cos\theta = t \\ \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}t \\ 0 \rightsquigarrow 1,\ \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right| = \\
&= \frac{16}{3}\pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} t^3 \,\mathrm{d}t = \pi.
\end{aligned}
$$

4 Aplikace trojného integrálu

Všechny aplikace dvojného integrálu můžeme přímo zobecnit i pro integrál trojný. Tedy například, je-li $\rho(x, y, z)$ funkce popisující hustotu tělesa, které vyplňuje množinu V, pak jeho hmotnost je

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

a jeho stacionární momenty okolo souřadnicových rovin jsou

$$M_{yz} = \iiint_V x\rho(x, y, z) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z, \quad M_{xz} = \iiint_V y\rho(x, y, z) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z, \quad M_{xy} = \iiint_V z\rho(x, y, z) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

Souřadnice těžiště pak jsou

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Dále můžeme spočítat například momenty setrvačnosti kolem souřadných os

$$I_x = \iiint_V \left(y^2 + z^2\right) \rho(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z, \qquad I_y = \iiint_V \left(x^2 + z^2\right) \rho(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

$$I_z = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right) \rho(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

nebo celkový elektrický náboj Q tělesa

$$Q = \iiint_V \sigma(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

kde σ je hustota náboje.