

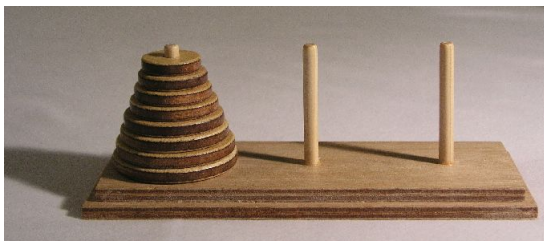
9. Posloupnosti a řady

1. Posloupnost je dána vzorcem $a_n = 2n^2$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Určete $a_6 - a_5$.
2. Čtvrtý člen jisté aritmetické posloupnosti s diferencí 5 je roven 3. Určete $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.
3. Je dána aritmetická posloupnost s diferencí -4 , pro kterou dále platí, že aritmetický průměr prvních šesti členů je roven 16. Určete a_1 a dále určete, který člen posloupnosti se rovná -78 .
4. Všechny členy jisté geometrické posloupnosti jsou kladné a platí rovnost $6a_1 - 5a_2 + a_3 = 0$. Určete kvocient q této posloupnosti, jestliže $q \in \langle 2\sqrt{2}; 3\sqrt{2} \rangle$.
5. Všechny členy jisté geometrické posloupnosti jsou kladné a platí rovnost

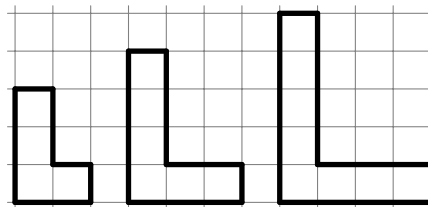
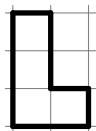
$$\frac{a_5}{a_3} = \frac{1}{9}.$$

Určete kvocient q této posloupnosti.

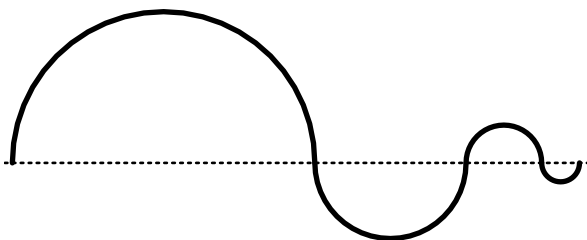
6. Hlavolam hanojská věž se skládá z několika kotoučů s otvorem uprostřed, které jsou nasazené na kůl (na obrázku níže je vidět taková věž z osmi kotoučů). Petr má věž tvořenou 64 kotouči, kde má každý kotouč o 3 mm větší poloměr než předchozí. Jaký obsah má základna postavené věže, jestliže svrchní, nejmenší kotouč má poloměr 2 cm?



7. Továrna vyrábí dřevěné dílky typu L (viz levý obrázek). Stroj na výrobu dílků se však pokazil a začal každý další dílek prodlužovat způsobem naznačeným vpravo. Po 37 vadně vyrobených kusech začal dílky opět zkracovat až do původního tvaru.



- (a) Kolik vadných dílů stroj vyrobil?
 - (b) Jestliže jeden čtvereček na obrázku má obsah 1 cm^2 , jaký obsah má největší vadně vyrobený kus?
 - (c) Jaký obsah materiálu byl využit na všechny vadně vyrobené kusy?
 - (d) Jestliže 1 m^2 materiálu stojí 1 500 Kč, jaká vznikla škoda?
8. Matematický mraveneček se pohybuje po zvláštní trajektorii, která se skládá z na sebe navazujících půlkružnic, kde každá další půlkružnice má o polovinu menší poloměr než předchozí (viz obrázek).



Jestliže mraveneček ušel dvacet takových půlkružnic, z nichž první má poloměr 1 m, jakou dráhu celkově urazil? Jaká je vzdálenost startu a cíle vzdušnou čarou?

9. Posloupnosti a řady

1. Rozhodněte, zda je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \frac{n+1}{2n+3}$, rostoucí nebo klesající nebo není ani jedno. Dále rozhodněte, zda je posloupnost omezená shora nebo zdola a určete limitu této posloupnosti.
2. Určete počet všech přirozených čísel, která jsou menší než 9 032 543 a jsou dělitelná 13, 19 a 29 zároveň. Dále určete součet všech takových čísel.
3. Určete součet všech sudých celých čísel z , pro která platí $z^2 - 53z + 150 \leq 0$.
4. Mezi čísla 16 a 81 vložte několik čísel tak, aby s danými čísly tvořila geometrickou posloupnost a součet všech čísel (tj. i s původními čísly) byl roven 211.
5. Čísla a, b, c jsou tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti, jejichž součet je 39. Čísla $(a+1), (b+5), c$ jsou tři po sobě jdoucí členy klesající aritmetické posloupnosti. Určete čísla a, b, c .
6. Čísla a, b, c jsou tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, pro které platí $3a + b + 3c = 77$. Čísla $a, (b+1), 2c$ jsou tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Určete čísla a, b, c .
7. Posloupnost obsahuje n po sobě jdoucích celých čísel a_1, \dots, a_n , z nichž nejmenší je a_1 . Dále platí $a_1 + \dots + a_n = n$.
 - Určete a_1 , jestliže $n = 15$.
 - Určete n , jestliže $a_1 = -20$.
8. Jsou dány nekonečné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot b^n,$$

které mají stejný součet s a platí $a \in (0; \frac{1}{3})$ a $b \in (0; 1)$.

- Určete b v závislosti na a .
 - Určete s , jestliže $b = 2a$.
9. Řešte v \mathbb{R} rovnici

$$\sum_{i=1}^{\infty} (3 \log_2 x - 2)^i = \frac{1}{3}$$

10. Ve čtverci $ABCD$ o straně 6 cm vyznačte lomenou čáru spojení následujících bodů: $A, B, S_1 = S_{BC}, S_2 = S_{AC}, S_3 = S_{AB}, S_4 = S_{BS_1}, S_5 = S_{S_1S_3}, S_6 = S_{BS_3}, S_7 = S_{BS_4}, S_8 = S_{S_4S_6}, S_9 = S_{BS_6}$, atd. Spočítejte délku této „nekonečné“ lomené čáry.
-

Řešení

Státní úroveň

1. $a_6 - a_5 = 22$
2. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -18$
3. $a_1 = 26, a_{27} = -78$
4. $q = 3$
5. $q = \frac{1}{3}$
6. $S = 1372,279 \text{ cm}^2$
7. (a) Vyrobit celkem 73 vadných kusů.
(b) Největší vadně vyrobený kus má obsah 78 cm^2 .
(c) Celkem bylo využito 3030 cm^2 materiálu.
(d) Vznikla škoda 454,5 Kč.
8. Mraveneček ušel asi 6,28 m, vzdušná vzdálenost startu a cíle byla přibližně 4 m.

Školní úroveň

1. Posloupnost je rostoucí a omezená zdola i shora. Limita posloupnosti je $\frac{1}{2}$.
2. Takových čísel je 1 260 a jejich součet činí 5 690 502 090.
3. Součet činí 648.
4. Mezi čísla vložíme 24, 36 a 54.
5. $a = 25, b = 10, c = 4$
6. $a_1 = 18, b_1 = 11, c_1 = 4$ nebo $a_2 = 4, b_2 = 11, c_2 = 18$
7. $a_1 = -6, n = 43$
8. $b = \frac{a}{1 - 2a}, s = \frac{1}{3}$
9. $x = \sqrt[4]{8}$
10. Délka čáry je rovna $21 + 3\sqrt{5} \text{ cm}$.