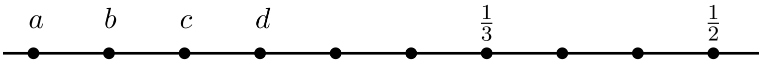
Otázky 1–11, verze A

1. Zapište **intervalem** nebo **sjednocením intervalů** množinu $M = \{x \in \mathbb{R};\ 2 < |x| \leq 5\}$.

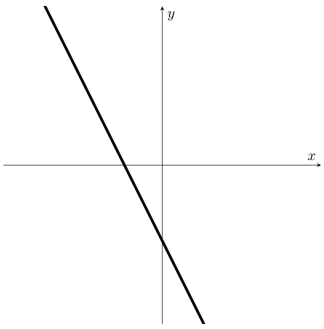
2. Zjednodušte výraz $\dfrac{(x^4y^{-3})^{-2}}{(x^3)^{-3}y^5}$ pro všechna nenulová $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Který z bodů a, b, c, d je obrazem čísla $\frac{1}{9}$?



4. Graf lineární funkce nemá popsané osy souřadnic (osy nemusí mít stejnou jednotku). Může se jednat o graf funkce:

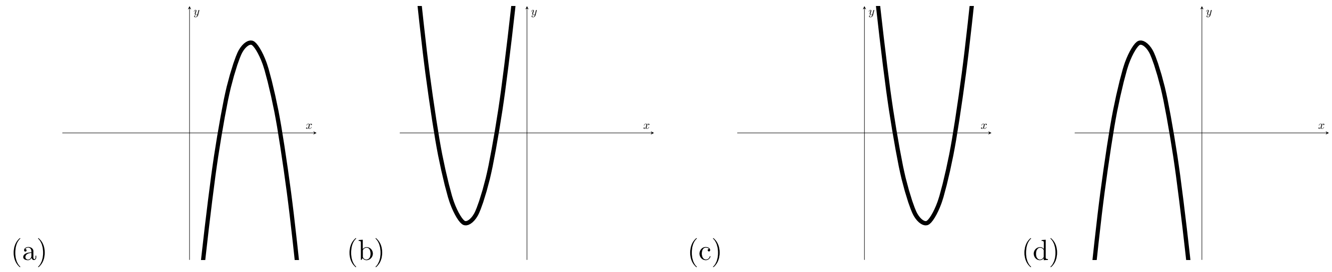
   (a) $y = 4x - 3$ (b) $y = -x + 5$ (c) $y = 2x + 1$ (d) $y = -0{,}5x - 2$



5. Tomáš se sestrou skládají papírové čepice – Tomáš umí za minutu složit 3 papírové čepice, jeho sestra pouze jednu. Na začátku Tomáš ukázkově složil 9 čepic, pak skládali chvíli spolu a skončili, až když měli celkem 57 čepic. Kolik minut celkem jim práce zabrala?

6. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $x^2 - x - 8 \geq x + 7$.

7. Která z parabol může odpovídat grafu funkce $y = (x + 3)(1 + x)$?



8. Řešte v intervalu $\langle 0°; 360°)$ rovnici $\cos x + \cos(-x) + \sqrt{3} = 0$.

9. Určete hodnotu $\operatorname{cotg} \alpha$ pro jistý ostrý úhel α, jestliže platí rovnice
$$\frac{3\cos\alpha + 4\sin\alpha}{2\sin\alpha} = 5.$$

10. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $5^x \cdot 2^x = 100^{x+1}$.

11. Určete číslo a, jestliže $a = \log_b\left(\dfrac{\sqrt[4]{b^3}}{b^2}\right)$ pro jisté kladné reálné číslo b různé od jedné.

12. Určete definiční obor funkce $f : y = \dfrac{\log(x^2 - 6x + 5)}{x - 6}$.

13. Barman míchá suché martini z ginu (180 korun za půllitr) a vermutu (130 korun za půllitr). Výrobní cena 0,1 l suchého martini je 32,25 korun. Kolik dílů vermutu má barman přidat, jestliže začal s pěti díly ginu?

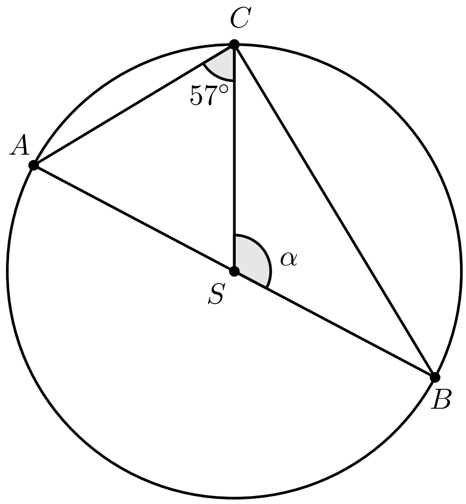
14. V $\mathbb{R}^2$ řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} xy - x^2 - y^2 + x - y &= -1 \\ x^2 + y^2 - xy &= 1. \end{aligned}$$

15. Tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti jsou 24, 6 a $(a-1)$. Určete číslo a.

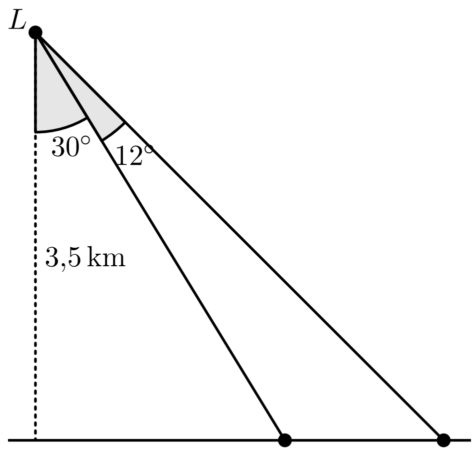
16. Emil si chce zlepšit fyzičku – jeho cílem je dát 200 kliků v kuse. První den zvládl na jeden zátah 36 kliků a každý další den zvládl o 4 kliky více než předchozí den. Kolikátý den se mu podařilo dosáhnout svého cíle?

17. Na kružnici $k(S, r)$ leží body A, B, C tak, že úsečka $|AB| = 2r$. Určete velikost úhlu α.

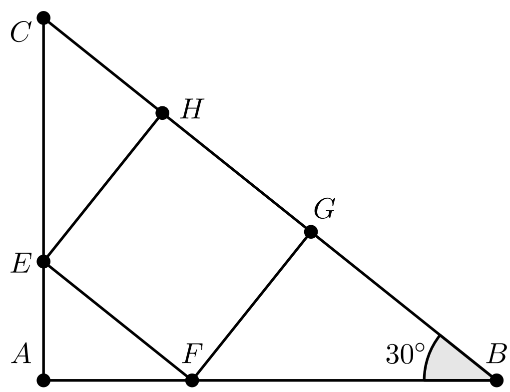


18. V rovnostranném trojúhelníku ABC se stranou délky 6 cm označme E střed strany AC a F střed strany BC. Určete obsah lichoběžníku $ABEF$.

19. Letadlo L letí ve výšce 3,5 km a zaměřilo dva cíle pod úhlem 12°. Určete vzdálenost obou cílů.



20. Do pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu A je vepsán čtverec $EFGH$ s obsahem 4 cm^2. Určete obsah trojúhelníku ABC, jestliže $|\sphericalangle ABC| = 30°$.

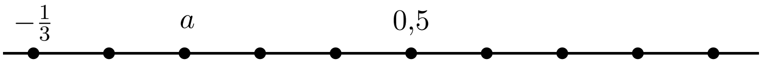


Otázky 1–11, verze B

1. Zapište **intervalem** nebo **sjednocením intervalů** množinu $M = \{x \in \mathbb{R};\ 4 \leq |x-1|\}$.

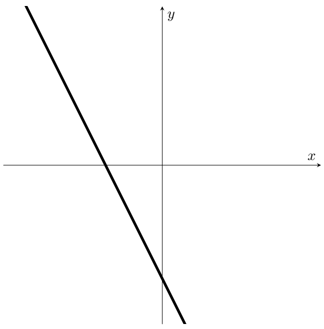
2. Zjednodušte výraz $\dfrac{(16b^3a^{-1})^{-3}}{(a^3b^{-2}\cdot 4)^{-2}}$ pro všechna nenulová $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Obrazem kterého čísla je bod a na číselné ose?



4. Graf lineární funkce nemá popsané osy souřadnic (osy nemusí mít stejnou jednotku). Body A a B, které na grafu leží, mohou mít souřadnice:

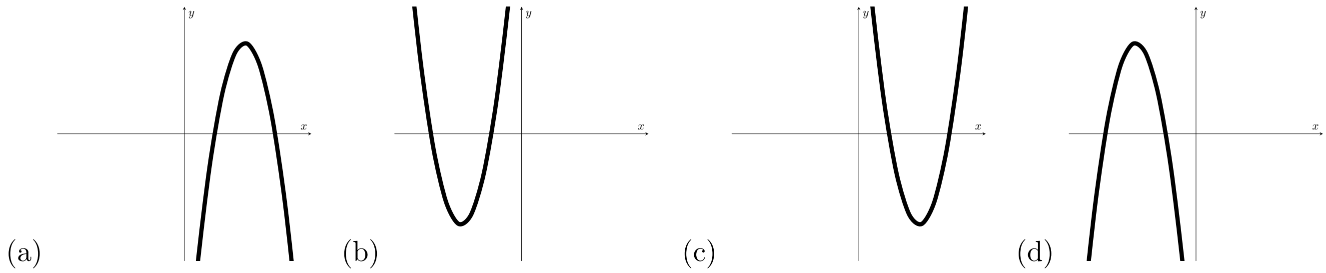
   (a) $A[-2;0], B[1;5]$ (b) $A[0;3], B[1;-1]$ (c) $A[-4;2], B[-1;-1]$ (d) $A[-2;2], B[-1;3]$



5. V bazénu je instalováno pět stejně velkých otvorů pro vypuštění vody. Při vypouštění plného bazénu se však dva z těchto otvorů zasekly (zůstaly zcela uzavřeny) a otevřely se až po pěti minutách. Celý proces vypouštění tak trval 17 minut. O kolik minut více trval proces vypouštění oproti ideálnímu stavu, kdy se otevře na začátku všech pět otvorů?

6. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $2x - x^2 \geq 2 - x$.

7. Která z parabol může odpovídat grafu funkce $y = 4x - x^2 - 3$?



8. Řešte v intervalu $\langle 0°; 360°)$ rovnici $2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(-x) + \sqrt{3} = 0$.

9. Buď $\alpha = 22°$ a $\beta \in \langle 0°; 360°), \alpha \neq \beta$. Určete β, jestliže platí $\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}\beta$.

10. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $3^{x+4} \geq 9^{x-1}$.

11. Určete číslo a, jestliže $a = \log\left(\dfrac{4^{2020}\cdot 25^{2020}}{10^{2019}}\right)$.

12. Určete definiční obor funkce $f: y = \dfrac{\log(x^2+2x+6)}{x}$.

13. Správná negace výroku „Nevěř nikomu nad čtyřicet let." zní

    (a) „Věř všem nad čtyřicet let."
    (b) „Věř všem pod nebo rovným čtyřicet let."
    (c) „Nevěř nikomu pod nebo rovným čtyřicet let."
    (d) Ani jeden z výroků (a), (b), (c) není negací.

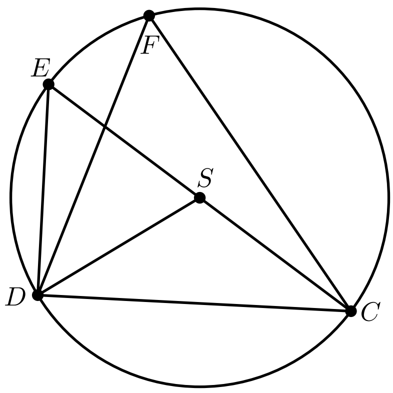
14. V $\mathbb{R}^2$ řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x - y - xy &= -6 \\ 5x - 4y + 3xy &= 18. \end{aligned}$$

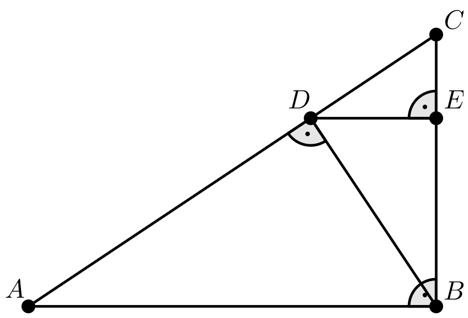
15. Určete kvocient geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_1 = 27$ a $a_4 = -\frac{1}{27}$.

16. Chlapec si hraje s kamením a staví do řady věže. Na začátku řady stojí věž z 5 kamenů a každá další má o 3 kameny navíc. Takto postavil celkem 23 věží, než zjistil, že mu zbývají pouze dva kameny, ze kterých vyšší věž nepostaví. Kolik měl na začátku kamenů?

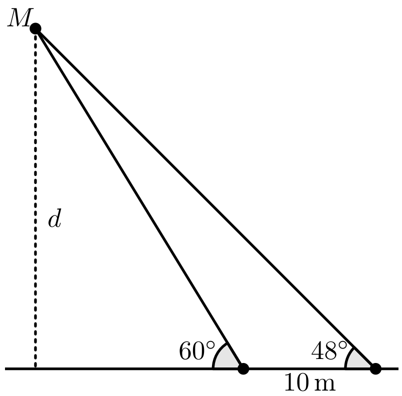
17. Na kružnici $k(S, r)$ leží body D, C, E, F tak, že trojúhelník ESD je rovnostranný. Určete $|\sphericalangle SDC|$.



18. V pravoúhlém trojúhelníku ABC je bod D patou výšky na přeponu b a bod E patou výšky na přeponu pravoúhlého trojúhelníku BDC. Určete obsah trojúhelníku BED, jestliže $|AB| = 8\,\text{cm}$ a $|\sphericalangle CAB| = 35°$.



19. Bod M na nedostupném okraji propasti byl zaměřen ze dvou bodů na dostupném okraji, vzdálených od sebe 10 m, pod vyznačenými úhly. Určete šířku propasti d.



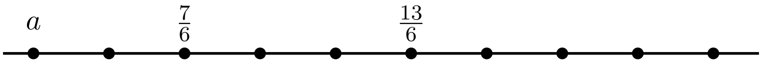
20. Rovnoramennému lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD a výškou délky 4 cm je opsána kružnice k o poloměru 5 cm. Určete obsah lichoběžníku, jestliže víte, že úhel ADB je pravý.

Otázky 1–11, verze C

1. Určete $|A|$, jestliže $A = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 - 4x + 4 \leq 0\}$.

2. Vyjádřete intervalem nebo sjednocením intervalů množinu $A \cap B$, jestliže $A = \{x \in \langle 0; 2\pi);\ \sin x \geq 0\}$ a $B = \{x \in \langle -\pi; \pi);\ \cos x \geq 0\}$.

3. Obrazem kterého čísla je bod a na číselné ose? Vyjádřete a jako desetinné číslo.



4. Karel má u sebe patnáctinu toho, co má Honza, a pět procent toho, co má Cyril. Honza má d procent toho, co má Cyril. Určete číslo d.

5. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $x^2 - 2x - 5 \leq x + 5$.

6. Je dána funkce $f: y = (x+5)^2$. O každém z tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé či nikoliv.

   (a) Grafem funkce f je parabola, která prochází počátkem souřadného systému.
   (b) Oborem hodnot funkce f jsou všechna nezáporná reálná čísla.
   (c) Funkce f je na intervalu $\langle -1; 1\rangle$ klesající.

7. Pro všechna $\alpha \in \langle 0; 360^\circ)$ řešte nerovnici $\operatorname{tg}\alpha \geq \dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sqrt{3}}$.

8. Pro velikost jistého tupého úhlu α platí $\sin\alpha = \frac{5}{13}$. Určete hodnotu $\cos\alpha$.

9. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $35^{3x-2} = 5^x \cdot 7^{2x} \cdot 5^x$.

10. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $\sin(30^\circ) \cdot 2^x > 2$.

11. Určete číslo a, jestliže $\log_a \dfrac{25^3 \cdot 4^3}{100} = 2$.

12. Určete číslo a, pro které platí, že bod $A\left[a; \frac{1}{8}\right]$ leží na grafu funkce $f: y = \log_2 x$.

13. Je dána soustava rovnic $x - 2y + 3 = 0$ a $2y - x - 3 = 0$. Vyberte **nesprávné** tvrzení o soustavě.

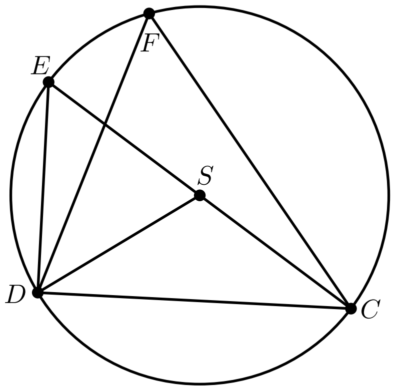
    (a) Sečtením obou rovnic dostaneme rovnost, která platí pro všechna čísla x a y.
    (b) Každá uspořádaná dvojice $[x; y]$ je řešením soustavy.
    (c) První rovnice je násobkem druhé rovnice.
    (d) Soustava má nekonečně mnoho řešení.

14. 50 hostů bylo ubytováno v trojlůžkových a čtyřlůžkových pokojích. Určete počet trojlůžkových pokojů, jestliže všech pokojů je čtrnáct a všechna místa v pokojích jsou obsazena.

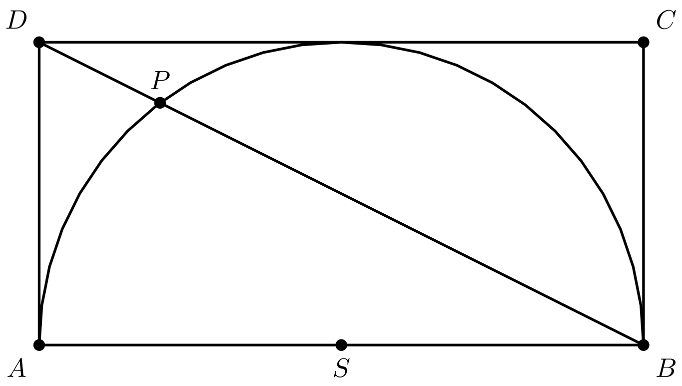
15. Hrdina v počítačové hře bojuje se závěrečným bossem, který má 600 životů. Použije schopnost BERSERK, která způsobí, že každý další úder způsobí o 7 životů více než předchozí. Kolikátým úderem hrdina bosse porazí, jestliže první úder způsobí ztrátu 25 životů?

16. Pro tři po sobě jdoucí kladné členy geometrické posloupnosti a, b, c platí rovnost $14a - 9b + c = 0$. Určete kvocient q této posloupnosti, jestliže je $q > 4$.

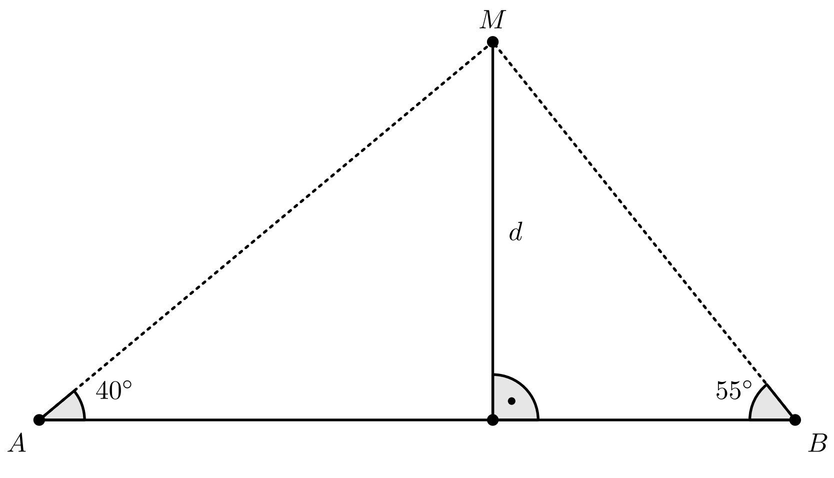
17. Na kružnici $k(S, r)$ leží body D, C, E, F tak, že trojúhelník ESD je rovnostranný. Určete $|\sphericalangle ECF|$, jestliže platí $|\sphericalangle SDF| = 40°$.



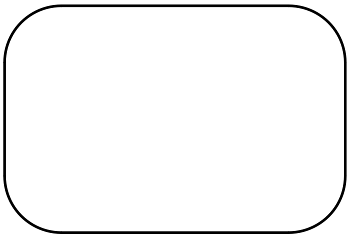
18. Do obdélníku $ABCD$ je vepsán půlkruh se středem S a poloměrem 5 cm. Označme průsečík úhlopříčky BD s hranicí půlkruhu, různý od bodu B, jako P. Určete délku úsečky BP.



19. Bod M na nedostupném břehu řeky byl zaměřen ze dvou bodů A a B na dostupném břehu, vzdálených od sebe 200 m, pod vyznačenými úhly. Určete šířku řeky d.



20. Určete obsah útvaru, který vznikl „zaoblením“ všech vrcholů obdélníka o rozměrech 6 cm a 4 cm čtvrtkružnicemi o poloměru 1 cm.



Správné odpovědi, verze C

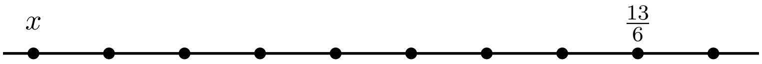
1. $|A| = 1$
2. $A \cap B = \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$
3. $a = \frac{1}{2}$
4. $d = 75$
5. $x \in \langle -2; 5 \rangle$
6. ne, ano, ne
7. $\alpha \in \langle 30°; 90°) \cup \langle 210°; 270°)$
8. $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$
9. $x = 2$
10. $x > 2$
11. $a = 100$
12. $a = \sqrt[8]{2}$
13. b
14. 6 trojlůžkových pokojů
15. v 11. kole
16. $q = 7$
17. $|\sphericalangle ECF| = 20°$
18. $|BP| \doteq 8{,}94\,\mathrm{cm}$
19. $d \doteq 105{,}71\,\mathrm{m}$
20. $S \doteq 23{,}14\,\mathrm{cm}^2$

Otázky 1–11, verze D

1. Určete $|A|$, jestliže $A = \{x \in \mathbb{R};\ |x| = 3\}$.

2. Vyjádřete intervalem nebo sjednocením intervalů množinu $A \cap B$, jestliže $A = \{x \in \mathbb{R};\ |x - 3| < 5\}$ a $B = \{x \in \mathbb{R};\ |x| \leq 2\}$.

3. Obrazem kterého čísla **nemůže** být bod x na číselné ose?



   (a) $\frac{9}{5}$ (b) $\frac{11}{5}$ (c) $\frac{13}{7}$ (d) $\frac{15}{7}$

4. Mikuláš má u sebe pytel s bonbony. Ty je schopen spravedlivě rozdělit mezi dva, tři, čtyři, pět, šest, osm nebo deset spolužáků. Kolik má Mikuláš v pytli bonbonů, jestliže jich je mezi 200 a 300?

5. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $x^2 + 7x + 1 \geq 4(x - 1)$.

6. Je dána funkce $f: y = (x - 2)^2$. O každém z tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé či nikoliv.

   (a) Funkce je na intervalu $\langle -2; \infty)$ rostoucí.
   (b) Oborem hodnot funkce f je interval $\langle 2; \infty)$.
   (c) Grafem funkce f je parabola, která protíná osu x ve dvou bodech.

7. Pro všechna $\alpha \in \langle 0; 360°)$ řešte nerovnici $2 \sin \alpha \leq \sqrt{3}$.

8. Pro velikost jistého tupého úhlu α platí $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$. Určete hodnotu $\sin \alpha$.

9. Vyjádřete číslo $\dfrac{3^{3333} + 3^{3335} + 3^{3337}}{91}$ jako mocninu prvočísla.

10. Je dána funkce $f: y = 3^x$. Určete všechna $a \in \mathbb{R}$, pro která platí $f(a) = \frac{1}{27}$.

11. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\log 2 = 1 - \log x$.

12. Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $\log_2 x < 4$.

13. Je dána soustava rovnic $5x - 5y = 0$ a $3y - 3x = 0$. Vyberte **nesprávné** tvrzení o soustavě.

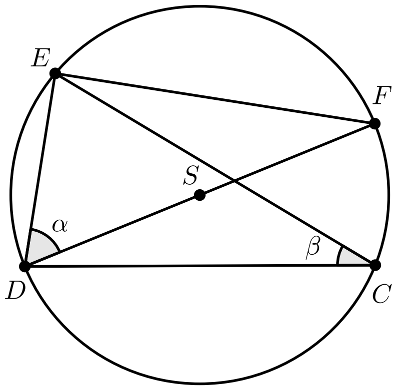
    (a) První rovnici dostaneme vynásobením druhé vhodným reálným číslem.
    (b) Soustava má nekonečně mnoho řešení.
    (c) Druhou rovnici dostaneme vynásobením první vhodným racionálním číslem.
    (d) Každá uspořádaná dvojice $[x; y]$ je řešením soustavy.

14. Jan dělá prodavače vstupenek a prodává za 10 Kč pro dítě a za dvojnásobnou cenu pro dospělé. Dělá si za každou vstupenku čárku, ale zapomněl si poznačit, kolik bylo dospělých a kolik bylo dětí. Na konci dne spočítal 50 čárek a měl v kase 700 Kč. Kolik bylo dospělých a kolik dětí?

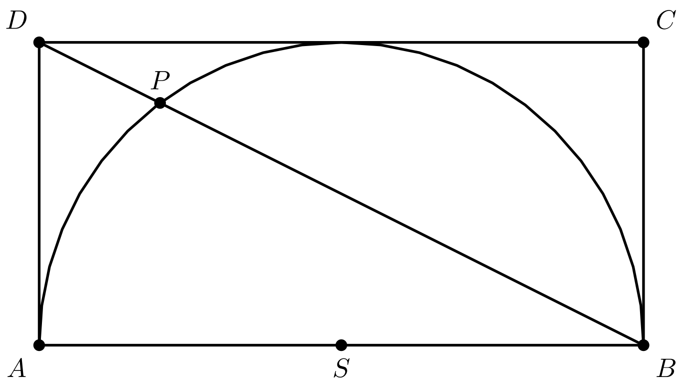
15. Jiří bere mzdu 32 000 Kč měsíčně. Jeho šéf mu dá na nový rok na výběr – buďto mu na celý rok sníží mzdu na 30 000 Kč, nebo mu ji za leden zvýší o 10 % a za každý následující měsíc ji bude postupně snižovat o 900 Kč. Kterou volbou by si Jiří vydělal v souhrnu za celý rok více?

16. V řadě za sebou jsou seřazeny zvětšující se koule. Jestliže jsou poloměry dvou sousedních koulí v poměru 2 : 3, je posloupnost objemů všech koulí geometrická. Určete její kvocient q.

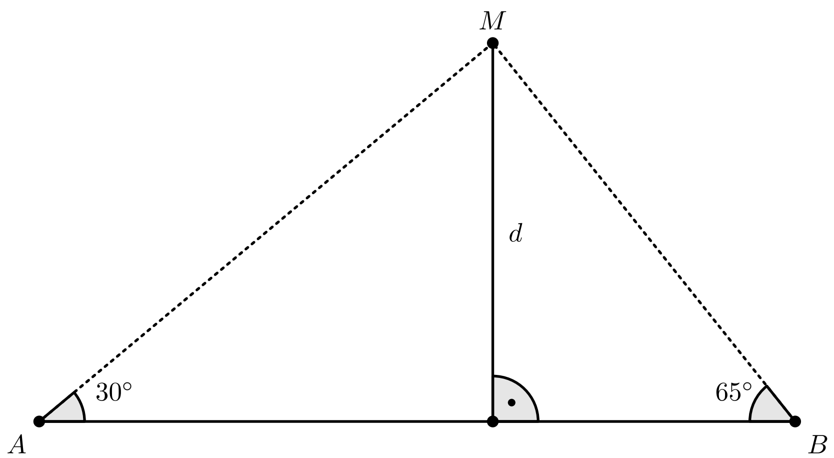
17. Na kružnici $k(S,r)$ leží body D,C,E,F dle obrázku. Určete velikost úhlu β, jestliže $\alpha = 64°$ a $r = 4\,\text{cm}$.



18. Do obdélníku $ABCD$ je vepsán půlkruh se středem S a poloměrem 4 cm. Označme průsečík úhlopříčky BD s hranicí půlkruhu, různý od bodu B, jako P. Určete délku úsečky PD.



19. Bod M na nedostupném břehu řeky byl zaměřen ze dvou bodů A a B na dostupném břehu, vzdálených od sebe 150 m, pod vyznačenými úhly. Určete šířku řeky d.



20. Rovnoramennému lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD a výškou délky 4 cm je opsána kružnice k o poloměru 5 cm. Určete obsah lichoběžníku, jestliže víte, že úhel ADB je pravý.