2. Číselné obory

1. Zjednodušte výraz $\dfrac{1+\frac{5}{b}}{\frac{b^2}{5}-5}$ pro všechna $b \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 0; 5\}$.

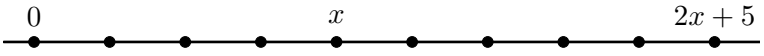
2. Zjednodušte výraz $\dfrac{4c^{-1}(c-c^2)}{c^{-1}-1}$. Dále určete, pro která reálná čísla c má daný výraz smysl.

3. Zjednodušte výraz $\sqrt[4]{\dfrac{a^{64}}{36} \cdot \left(\dfrac{2 \cdot 3}{a^{14}}\right)^2}$ pro všechna $a \in (0; \infty)$.

4. Zjednodušte číselný výraz $\dfrac{3^{2020}+3^{2021}+3^{2022}+3^{2023}}{40}$ (výsledek zapište jako mocninu prvočísla).

5. Kolik cifer má zápis přirozeného čísla $\left(2^{127} \cdot 5^{125}\right)$ v desítkové soustavě?

6. Na číselné ose jsou obrazy tří čísel: $0, x$ a $2x+5$. Všechny dílky na ose jsou stejně velké.



   - Vyjádřete poměr $x : (2x+5)$.
   - Určete velikost jednoho dílku.

7. Do všech prázdných polí tabulky zapište stejné nenulové číslo n tak, aby byl součin tří čísel v prvním řádku roven převrácené hodnotě součinu všech tří čísel v druhém řádku.

	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{1}{12}$		

8. Po zvýšení poplatku za vypracování matematického domácího úkolu o 50 % si Karel od spolužáků účtuje přesně 354 korun za úkol. Kolik stálo vypracování domácího úkolů před zdražením?

9. Pro tři nenulová čísla a, b, c platí, že b je 48 % čísla a a také 32 % čísla c. Vypočítejte, kolik procent z čísla a představuje číslo c.

10. Dva kamarádi spustili stopky. Miloš tleskne vždy po 12 sekundách, Karel tleskne vždy po 18 sekundách. Po kolika sekundách od spuštění stopek tlesknou poprvé oba kamarádi najednou?

2. Číselné obory

1. Upravte výraz $(n^0 + 6n^{-1} - 7n^{-2}) \cdot \left(\frac{\sqrt{n+7}}{n}\right)^{-2}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
2. Určete nejmenší přirozené číslo n, pro které je výraz $\frac{n}{30} - \frac{38}{n}$ kladný.
3. Určete poslední cifru čísel:
   - $11^{(12^{13})}$;
   - 2019^{2019};
   - $222^{(22^2)}$.
4. Dokažte, že $31 \mid \left(5^{3131} + 5^{3133} + 5^{3135}\right)$.
5. Dokažte, že $6 \mid (7^n + 5)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
6. Kterými číslicemi nemůže končit $n!$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$?
7. Nalezněte takové číslo $n \in \mathbb{N}$, jehož faktoriál končí právě pěti nulami (šestá číslice zprava je tedy nenulová), eventuálně dokažte, že takové číslo n neexistuje.
8. Porovnejte mezi sebou racionální čísla $\frac{666\,666\,666\,664}{666\,666\,666\,667}$ a $\frac{555\,555\,555\,554}{555\,555\,555\,557}$.

Řešení

Státní úroveň

1. $\dfrac{5}{b(b-5)}$
2. $4c; \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$
3. a^9
4. 3^{2020}
5. 126 cifer
6. - $x : (2x + 5) = 4 : 9$
   - 1 dílek má velikost 20 jednotek
7. $n = -6$
8. 236 Kč
9. Číslo c představuje 150 % čísla a.
10. Poprvé tlesknou najednou po 36 sekundách.

Školní úroveň

1. $n - 1$
2. $n = 34$
3. - Poslední cifra je 1.
   - Poslední cifra je 9.
   - Poslední cifra je 6.
4. *Nápověda: Vytkněte* 5^{3131}.
5. *Nápověda: Dokažte indukcí.*
6. Nemůže končit na 3, 5, 7, 8 a 9.
7. Takové číslo n neexistuje.
8. Platí $\dfrac{666\,666\,666\,664}{666\,666\,666\,667} > \dfrac{555\,555\,555\,554}{555\,555\,555\,557}$.