Referenční plochy a souřadnicové soustavy

Matematická kartografie

Osnova

1. Referenční plochy
   - výškové systémy
   - referenční elipsoid
   - koule
   - rovina
2. Souřadnicové soustavy
   - souřadnicové soustavy na referenčním elipsoidu
   - souřadnicové soustavy na kouli
   - souřadnicové soustavy v zobrazovací rovině
3. Důležité křivky na referenční ploše
   - ortodroma
   - loxodroma

1

REFERENČNÍ PLOCHY

Matematický základ modelů terénu

Úkoly matematické kartografie

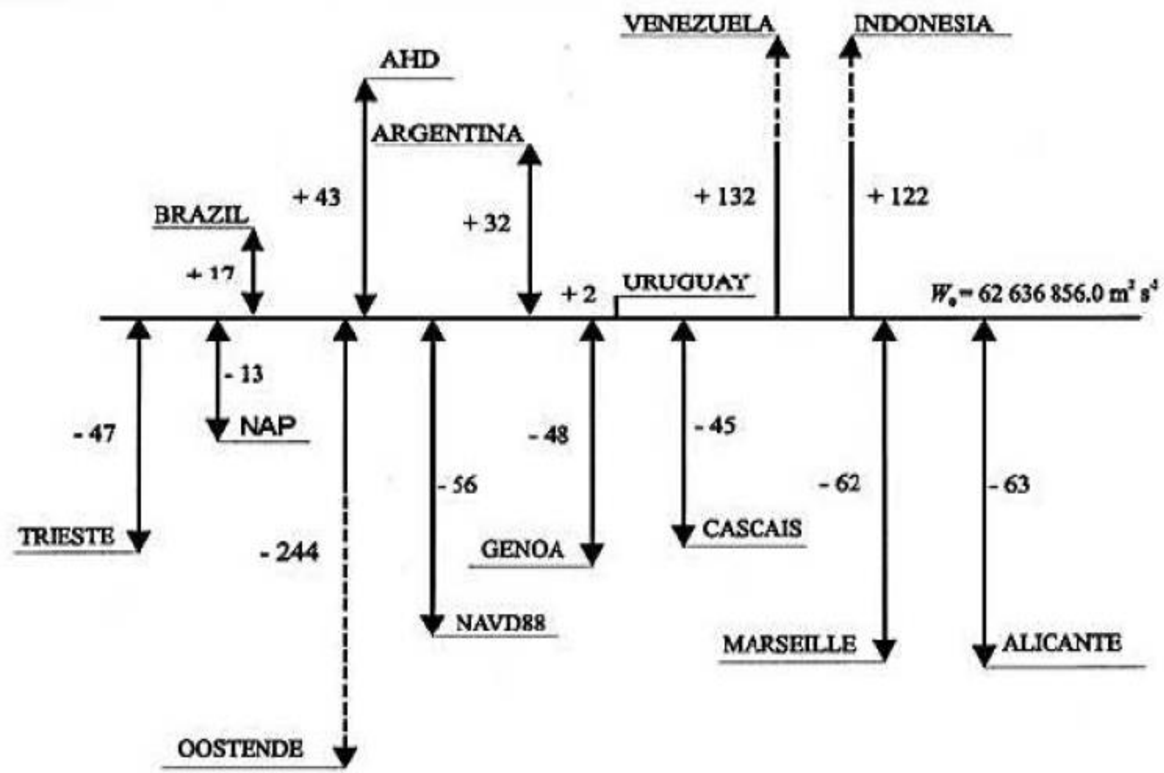
- proces transformace prostorových souřadnic objektů a jevů na referenčních plochách do roviny
- zákonitosti, zkreslení
- metodika výběru vhodných transformací pro modelovaná území

Výsledek – kartografická zobrazení

Nadmořská výška

- výšková měření – geoid, kvazigeoid
- výškové systémy se liší
- jak se tedy měří nadmořská výška? Kde je "nula"?

vertikální posuny výškových systémů



Nadmořská výška

Liší se i úrovně hladiny, od které se měří.

Stát	Název výškového systému	Zkratka	Nulová plocha	Druh výšek
Austrálie	Australian Height Datum	AHD	AUSGeoid09	elipsoidické
Čína	Hong Kong Chart Datum	CD	LAT - 1,38 m pod MSL - Hong Kong	ortometrické
Finsko	Helsinky 1960	N60	MSL - Helsinki, rok 1960	ortometrické
Francie	Nivellement General de la France	IGN69	MSL - Marseille	normální ortometrické
Irsko	Malin Head		MSL, 1960 - 1969	ortometrické
Japonsko	Japanese Standard Levelling Datum 1949	JSLD	24.4140 m pod MSL - TokyoBay	ortometrické
Jižní Afrika	SouthAfrican Land Leveling		SAGEOID10	elipsoidické
Kanada	Canadian Geodetic Vertical Datum 1928	CGVD28	MSL - odvozeno z mnoha různých míst	Helmertovy ortometrické
Korsika	IGN78 Corsica		Nivelační bod MM3 - Ajaccio, výška 3.640 m pod MSL	normální ortometrické
Kuvajt	Kuwait PWD		MLLW - Kuwait City, 1.03m pod MSL	ortometrické
Nizozemí, Německo aj.	Normaal Amsterdams Peil	NAP	MSL Amsterdams Peil, rok 1684	normální ortometrické
Nová Kaledonie	Nivellement General de Nouvelle Caledonie		1.885 m nad MSL	ortometrické
Nový Zéland	New Zealand Vertical Datum 2009	NZVD2009	NZGeoid2009	normální ortometrické, elipsoidické
Turecko	Antalya		MSL - Antalya, 1936-71	ortometrické
Velká Británie	Ordance Datum Newlyn	ODN	MSL - Newlyn	ortometrické

MSL – Mean Sea Level

LAT – Lowest Astronomical Tide

MLLW – Mean Low Low Water

Nadmořská výška

Jaké znáte výškové systémy na našem území?

- Výškový systém baltský po vyrovnání (Bpv) - od roku 1957
- Výškový systém Jadranský (předtím)
- Normall-Null (za války)

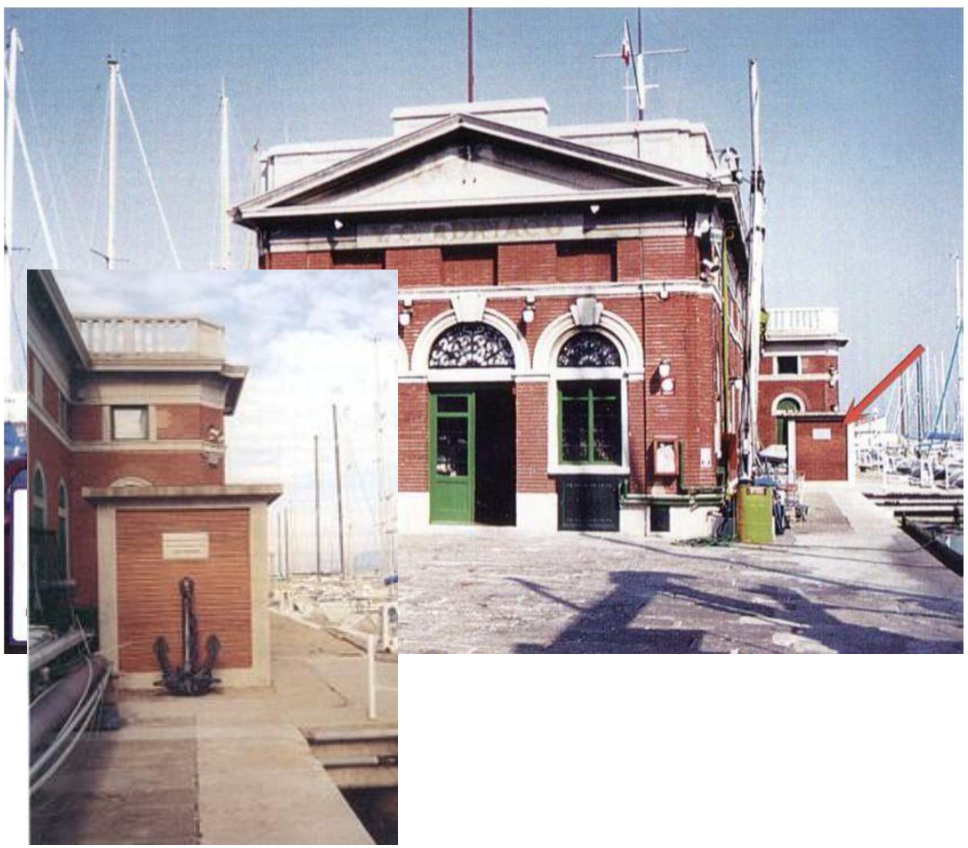
Baltský systém je výš nebo níže než Jadranský?

Jadranský = Bpv + cca 0,38 až 0,42 m

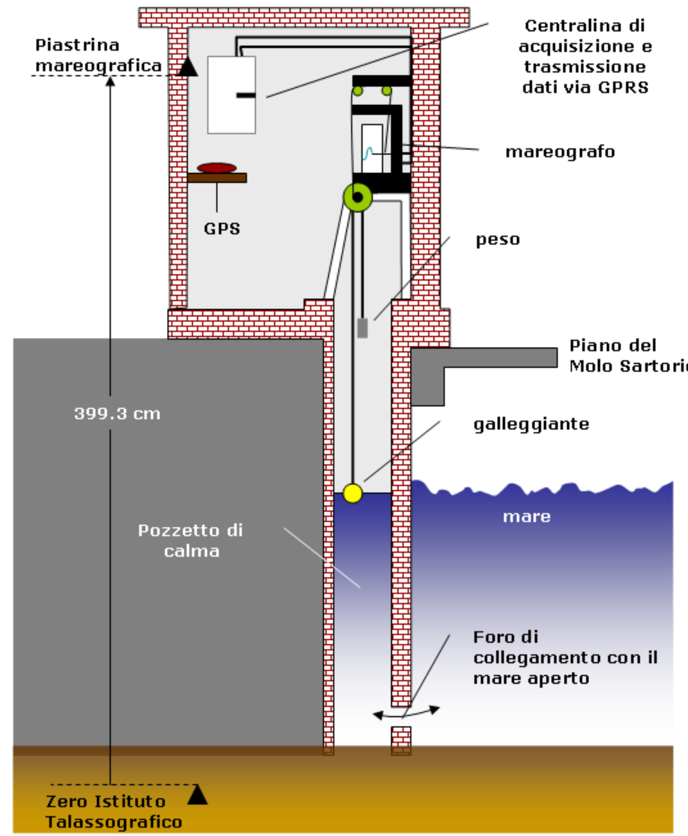
Nadmořská výška

- Marigraf – „tide gauge“, marigraph
- Terst

Molo Sartorio, mareográf (‘tengeríró’)

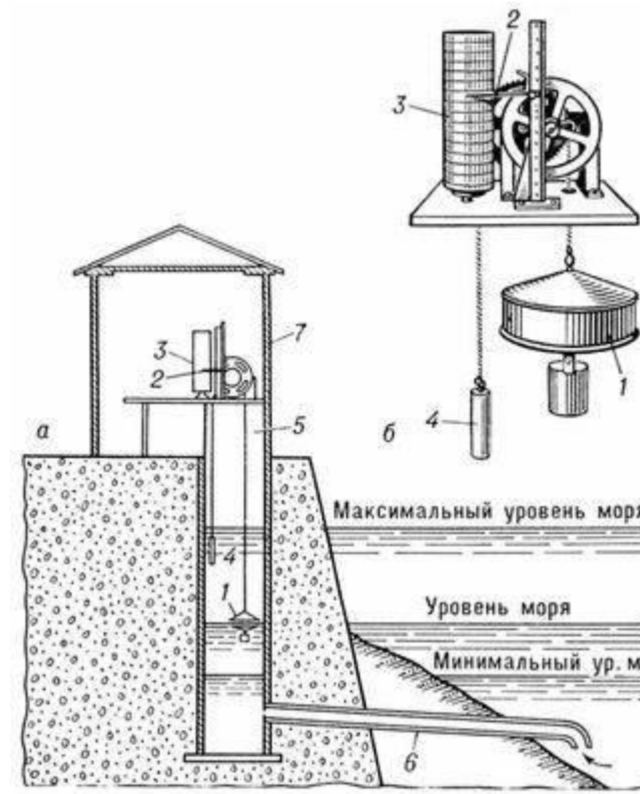


Sezione della cabina mareografica presso il Molo Sartorio



Nadmořská výška

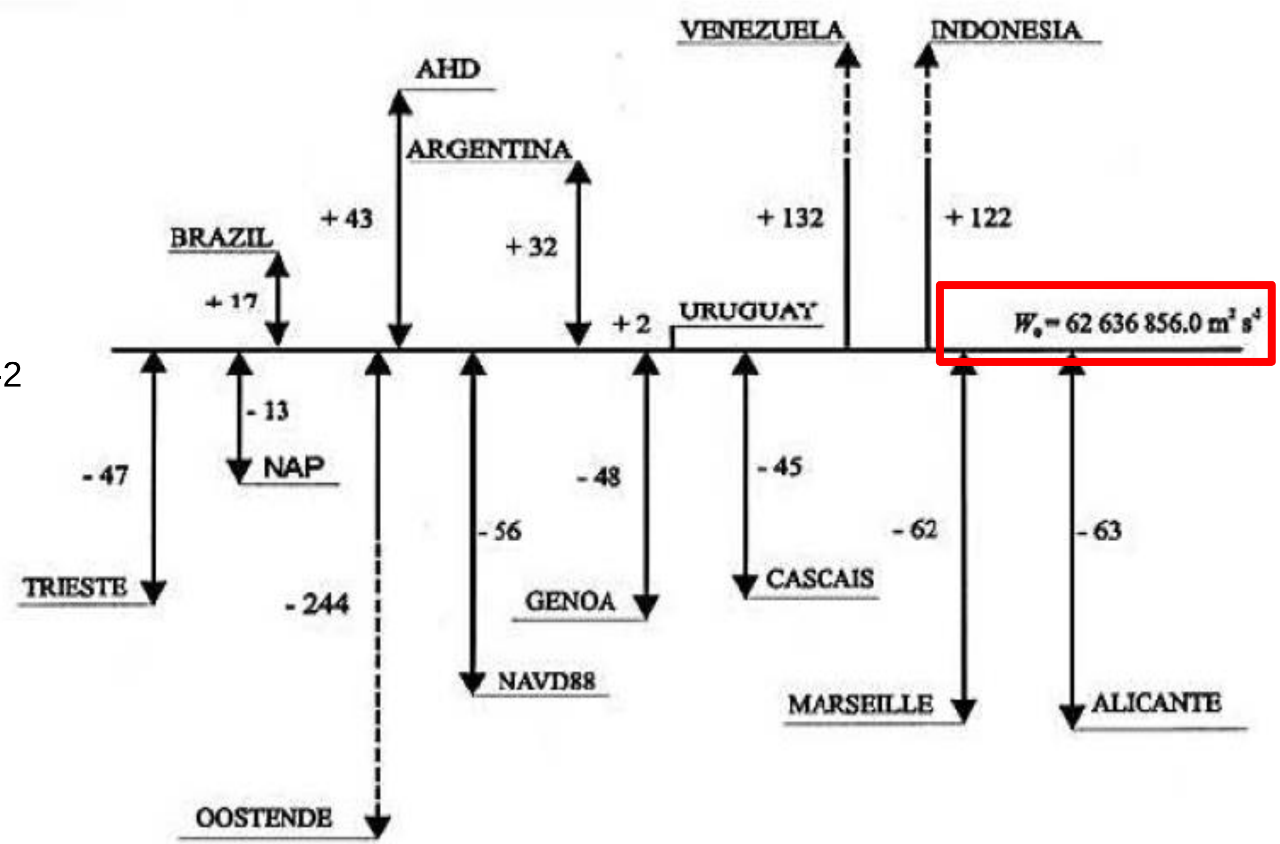
- Kronštadt



Nadmořská výška

- Každý stát má blízko jiné moře.
- Definuje se proto celosvětový systém. Ne na základě moře, ale jako jednotný tíhový potenciál.

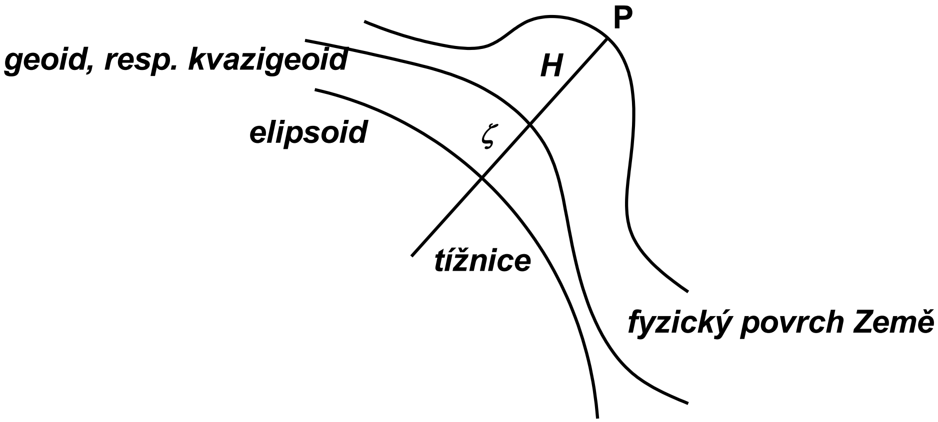
Rozdíly jsou vztaženy k **ploše se zvoleným tíhovým potenciálem** $W_0 = 62\,636\,856{,}0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$



Referenční plochy

Rozdíly jsou vztaženy k **ploše se zvoleným tíhovým potenciálem** = ke **geoidu**.

- fyzický povrch Země
- geoid, kvazigeoid
- elipsoid, koule, rovina



Tíhová síla – co to je?

Na rovníku je odstředivá síla, na pólu ne. Gravitační síla působí všude. Výslednice je tíhová síla.

Geoid = ekvipotenciální plocha zemského tíhového pole odpovídající střední hladině hypotetického zemského oceánu (*Terminologický slovník VÚGTK*)

Referenční plochy

geoid = ekvipotenciální plocha zemského tíhového pole odpovídající střední hladině hypotetického zemského oceánu. Tížnice je na něj kolmá.

- Geoid je zvlněný, protože pohoří ovlivňuje potenciál. Je zvlněný méně než povrch Země, ale je to až 100 metrů.

kvazigeoid = referenční plocha blízká ploše geoidu (max. odchylka 2 m)

- prochází body vzdálenými od zemského povrchu o jejich normální výšky (odpočítávají se podle siločar tíhového pole),
- na oceánech se s geoidem ztotožňuje,
- lze jej určit bez znalosti hustotního rozložení v zemské kůře,
- lze definovat na základě gravimetrických a geodetických měření na zemském povrchu.

elipsoid = těleso popsané matematickým vztahem

- Na elipsoidu se řeší geodetické úlohy, protože nahrazuje ve výpočtech zemské těleso.
- Elipsoid se od geoidu (kvazigeoidu) může lišit i o 50 metrů.

Referenční plochy

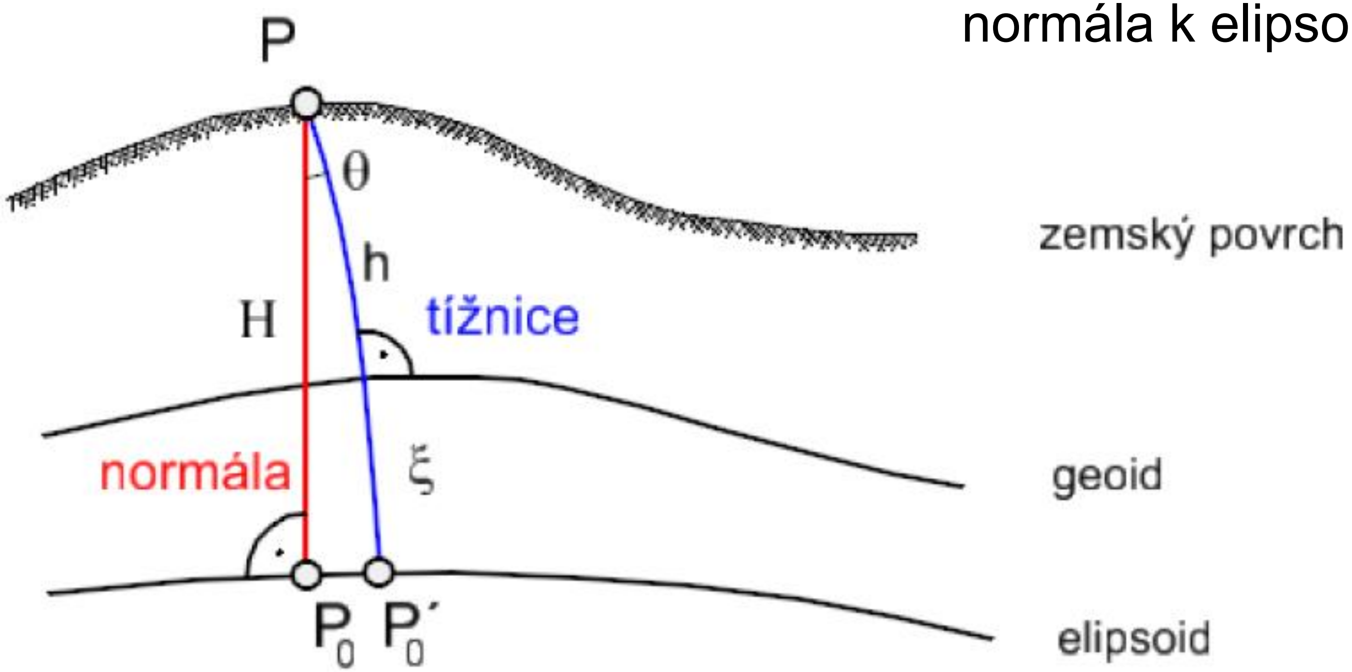
Bod P leží na zemském povrchu.

Promítnutím P podle normály k elipsoidu vznikne bod P_0.

$H = h + \xi$

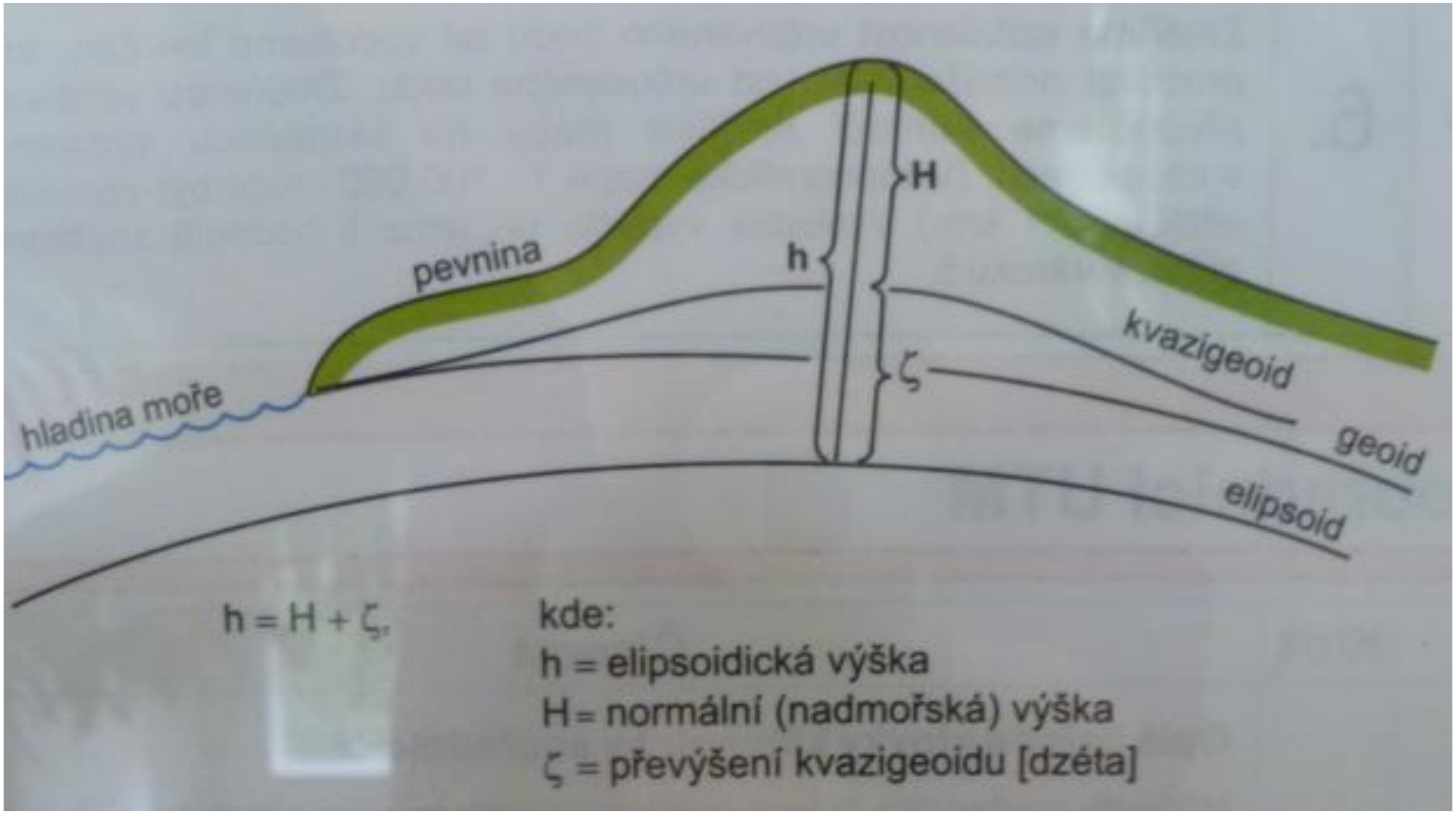
- H – elipsoidická výška – vzdálenost P_0-P
- h – výška bodu od hladinové plochy (geoid nebo kvazigeoid)
- ξ – převýšení elipsoidu vůči geoidu (kvazigeoidu)
- ϴ – tížnicová odchylka [„dzéta“]

normála k elipsoidu x tížnice!



Elipsoidická výška x výška od hladinové plochy. Tak co je tedy nadmořská výška?

Referenční plochy



Takže **kvazigeoid** je to, od čeho se většinou počítá „nadmořská výška“. Ale lze snad říci i „od geoidu“.

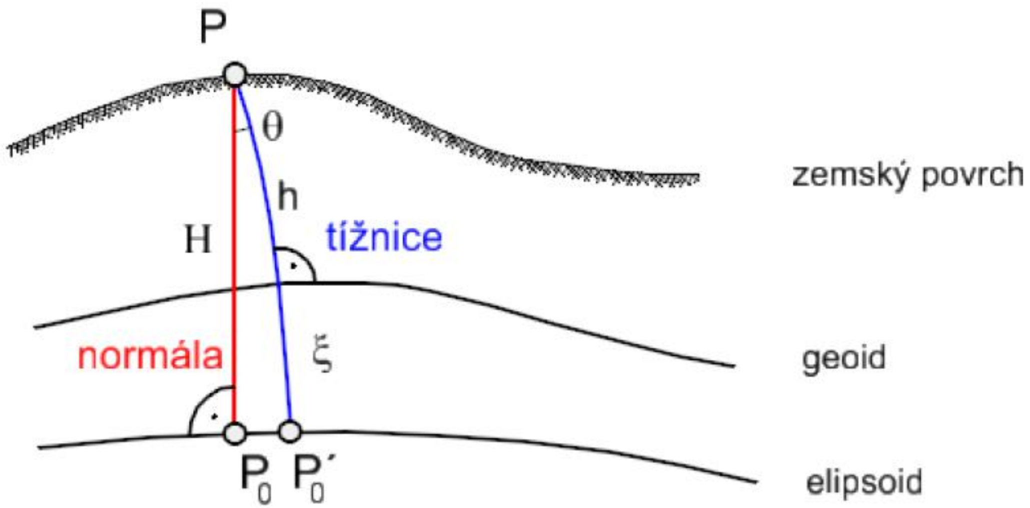
Referenční plochy

- Nadmořská výška = vzdálenost bodu od střední hladiny moře měřená podél tížnice (*Terminologický slovník VÚGTK*)

- Nad geoidem (kvazigeoidem) zjistíme po tížnici, jaká je **nadmořská výška** určitého objektu.

- V místě, kde se normála protne s elipsoidem - to je **poloha** objektu.

- Budeme se učit, jak z elipsoidu dostaneme polohu do plochy mapy.



- Na mapách je uvedena nadmořská výška nad kvazigeoidem.
- GPS ale často měří „elipsoidickou výšku“ nad WGS 84.
- Může tam být tedy odchylka – převýšení kvazigeoidu nad elipsoidem.

Lišov

V jižních Čechách.

Jeden ze základních bodů nivelační sítě Rakousko-Uherska.

“Locus perennis“ = věčné místo

Byla mu stanovena výška a od něj se pak měřily všechny další.

Od Jadranu 565,1483 m. n. m.

Od Baltu 564,760 m. n. m.

Přístroje měří od geoidu, ale přepočítává se hodnota tak, jako by byla od Baltu, resp. od Lišova.

Želešice

V údolí Bobravy.

Základní nivelační bod pro Moravu a Slezsko.

Od Baltu 210,552 m. n. m.

Referenční elipsoid

elipsoid = těleso popsané matematickým vztahem

- Na elipsoidu se řeší geodetické úlohy, nahrazuje ve výpočtech zemské těleso.

K definici potřebujeme:

a, b – velikost hlavní a vedlejší poloosy (semimajor axis, seminor axis),

a, e – velikost hlavní poloosy a numerická výstřednost (excentricita, eccentricity),

a, e´ – velikost hlavní poloosy a druhá excentricita,

a, f – velikost hlavní poloosy a zploštění (flattening).

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

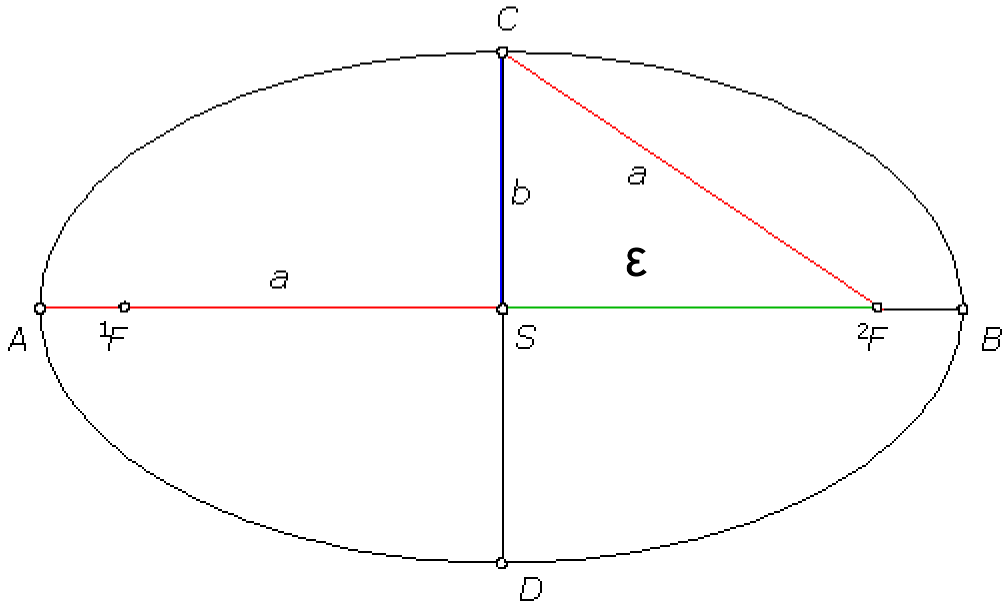
$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

$$f = \frac{a - b}{b}$$

Referenční elipsoid

Číselná excentricita e je podíl délkové excentricity a hlavní poloosy.

Neplést s délkovou excentricitou ε! Ta je někdy nazývaná taky jako lineární a je to vzdálenost středu a ohniska elipsy.



e<1
Čím je elipsa protáhlejší, tím je e bližší k 1.

Co by se stalo, kdyby e=1?

Co by se stalo, kdyby e=0?

Na délkovou excentricitu ani nesedí vzorec.

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

$$f = \frac{a - b}{b}$$

Referenční elipsoid

Parametry používaných referenčních elipsoidů v ČR:

Elipsoid	Besselův	Krasovského	WGS84 (GRS80)
Velká poloosa a [m]	6 377 397,1550	6 378 245,000	6 378 137,000
Malá poloosa b [m]	6 356 078,9629	6 356 863,0188	6 356 752,3142
Druhá mocnina excentricity e^2	0,006 674 372 2	0,006 693 421 6	0,006 694 380
Druhá mocnina druhé excentricity e'^2	0,006 719 218 8	0,006 738 525 4	0,006 739 496 7
Reciproká hodnota zploštění $1/f$	299,152 812 853	298,300 003 2	298,257 223 6

Krasovského a WGS se moc neliší, ale Besselův je dost odlišný. Proč?

- Je starší než zbývající dva. Besselův 1841, Krasovského 1940.
- Besselův byl definován tak, aby co nejlépe dosedl na Evropu, např. na východní Sibiři byl již dost nepřesný.
- Novější elipsoidy jsou definovány pro celý svět.

Koule

Kdy se používá koule coby referenční plocha?

- při tvorbě map malých měřítek, při vizualizaci digitálních dat s menšími nároky na minimalizaci zkreslení a při řešení jednodušších navigačních úloh.

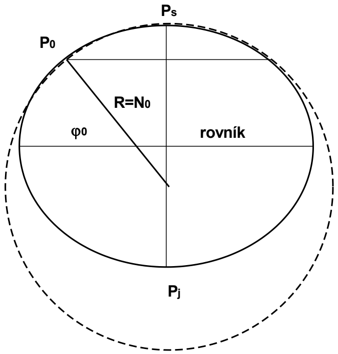
- při tzv. dvojitém zobrazení, kdy je referenční elipsoid nejprve zobrazen na kouli, která se poté zobrazuje do roviny = Křovák
- tedy se používá i naopak při velmi přesném zobrazení!

Koule

- Nejen elipsoidy, ale i referenční koule mohou být různé.

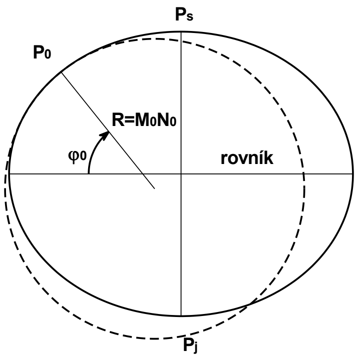
- Území podél rovnoběžky: poloměr koule rovný **příčnému poloměru křivosti elipsoidu**.
    - zachována délka rovnoběžky

$$R = N_O$$



- Území kruhového tvaru: poloměr koule rovný **střednímu poloměru křivosti** rovnoběžky φ_0 procházející jeho těžištěm.
    - tělesa se těsně přimykají

$$R = \sqrt{M_0 N_O}$$



- Poloměr koule, aby měla podobný objem jako elipsoid: R = 6371 km.

poloměr křivosti – viz např.
http://old.gis.zcu.cz/studium/mk2/multimedialni_texty/index_soubory/hlavni_soubory/zaklady.html#polomer

Referenční rovina

Při tvorbě map z velmi malého území o poloměru zhruba do 20 km je možné pro polohová data uvažovat zakřivený povrch Země jako rovinu a pro zobrazování používat referenční rovinu:

- vodorovné úhly jsou téměř stejné jako v rovině,
- zkreslení délek, ploch a úhlů je minimální a zanedbatelné.

Pro výšková měření je ale nutné zakřivení Země uvažovat.

2

SOUŘADNICOVÉ SOUSTAVY

Souřadnicové soustavy - elipsoid

Musí být určeno:

-výchozí bod - počátek soustavy

-jednotka měření

-směr přírůstku a úbytku hodnot - osy

Elipsoid

-zeměpisné souřadnice

-měřeny od rovníku a základního poledníku

Zeměpisná šířka = úhel mezi rovinou rovníku a spojnicí daného bodu a středu elipsoidu. Je definice správně?

Ne. Elipsoid není koule, spojnici nelze vést ze středu.

Zeměpisná šířka = úhel mezi rovinou rovníku a **normálou** v daném bodě.
Zeměpisná délka = úhel mezi rovinou základního poledníku a **normálou** v daném bodě.
Normála - čára kolmá na povrch elipsoidu - neprochází středem elipsoidu!

Souřadnicové soustavy - elipsoid

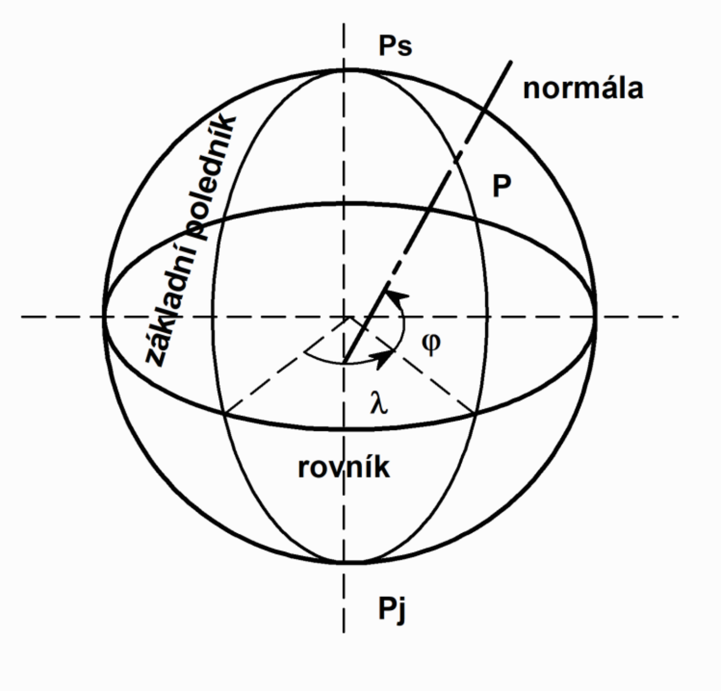
zeměpisné souřadnice (geographic coordinate system)

- **zeměpisná** (geodetická) **šířka** φ (latitude)
- **zeměpisná** (geodetická) **délka** λ (longitude)

rovník (equator)

základní poledník

- Greenwich, nultý
- Ferro: 17°40′ západně od Greenwich



důležité parametry:

- meridiánový poloměr křivosti - M
- příčný poloměr křivosti - N

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

$$N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}$$

Souřadnicové soustavy - elipsoid

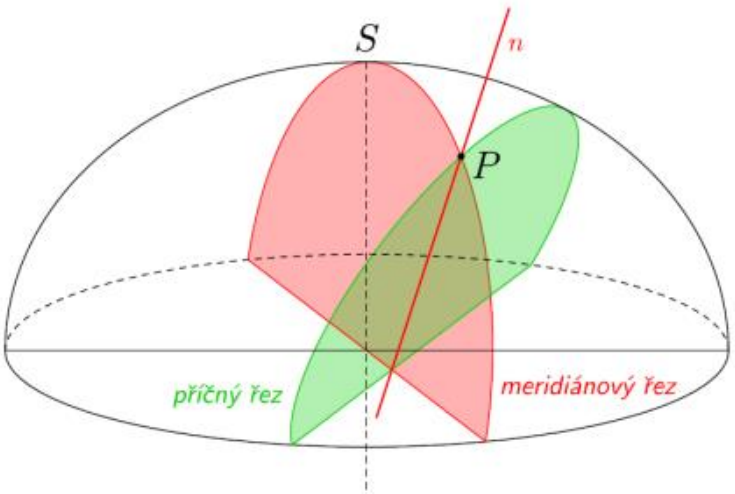
Poloměr křivosti:

- Elipsoid je pravidelný - v každém bodě P nám stačí křivost ve dvou směrech.

- V bodě P existují dva extrémní normálové řezy (řez rovinou procházející normálou v bodě a kolmou na povrch elipsoidu).

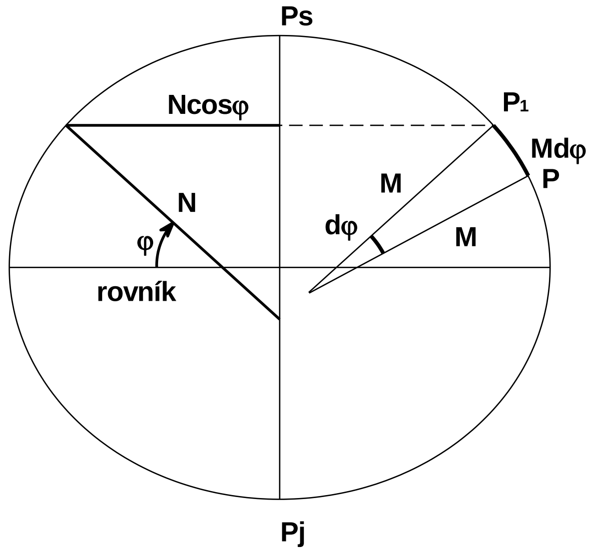
- Křivost těchto řezů je zde minimální a maximální, jsou to tzv. hlavní křivosti.
    - meridiánový poloměr křivosti M - poloměr křivosti v poledníku
    - příčný poloměr křivosti N - poloměr křivosti v rovině kolmé na poledník = v rovnoběžce

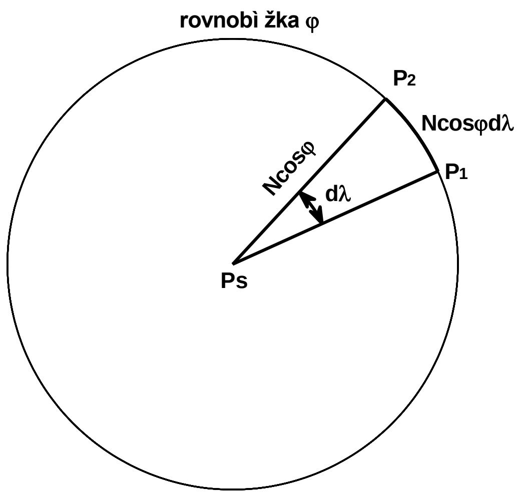
- Dalších normálových řezů je nekonečně mnoho, jejich křivosti jsou různé.



Souřadnicové soustavy - elipsoid

příčný poloměr křivosti N - všechny normály jedné rovnoběžky se protínají v bodě ležícím na ose rotace





Elementy poledníku ds_p a rovnoběžky ds_r

$$ds_p = M d\varphi \qquad ds_r = N \cos\varphi d\lambda$$

Výpočet délky poledníkového a rovnoběžkového oblouku

V některých aplikacích matematické kartografie je nutné znát délku poledníkového oblouku (například v Gaussově zobrazení), případně i délku oblouku rovnoběžky.

Délka poledníkového oblouku:

$$s_p = \int_0^{\varphi} M d\varphi$$

Po úpravě a rozvinutí v řadu podle binomické věty:

$$s_p = a(1-e^2)\int_0^{\varphi}(1-e^2\sin^2\varphi)^{-3/2}d\varphi$$

$$(1-e^2\sin^2\varphi)^{-3/2} = 1+\frac{3}{2}e^2\sin^2\varphi+\frac{15}{8}e^4\sin^4\varphi+\frac{35}{16}e^6\sin^6\varphi+\frac{315}{128}e^8\sin^8\varphi+\ldots$$

$$(1-e^2\sin^2\varphi)^{-3/2} = A-B\sin 2\varphi+C\sin 4\varphi-D\sin 6\varphi+E\sin 8\varphi-\ldots$$

Výpočet délky poledníkového a rovnoběžkového oblouku

$$A = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \dots$$

$$B = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \dots$$

$$C = \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \dots$$

$$D = \frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \dots$$

$$E = \frac{315}{16384}e^8 + \dots$$

Koeficienty A, B, C, D a E jsou funkcemi pouze excentricity e^2 a jsou tedy pro konkrétní elipsoid konstantní.

Výpočet délky poledníkového a rovnoběžkového oblouku

Po dalších úpravách:

$$s_p = a(1-e^2)\int_0^{\varphi}(A - B\sin 2\varphi + C\sin 4\varphi - D\sin 6\varphi + E\sin 8\varphi - ...)d\varphi$$

$$s_p = a(1-e^2)\left(A\frac{\varphi°}{\rho°} - \frac{B}{2}\sin 2\varphi + \frac{C}{4}\sin 4\varphi - \frac{D}{6}\sin 6\varphi + \frac{E}{8}\sin 8\varphi - ...\right)$$

$$\frac{a(1-e^2)A}{\rho°} = A^*$$

$$a(1-e^2)\frac{B}{2} = B^*$$

$$a(1-e^2)\frac{C}{4} = C^*$$

$$a(1-e^2)\frac{D}{6} = D^*$$

$$a(1-e^2)\frac{E}{8} = E^*$$

Délka poledníkového oblouku:

$$s_p = A^*\varphi° - B^*\sin 2\varphi + C^*\sin 4\varphi - D^*\sin 6\varphi + E^*\sin 8\varphi - ...$$

Výpočet délky poledníkového a rovnoběžkového oblouku

Elipsoid	*A** [m]	*B** [m]	*C** [m]	*D** [m]	*E** [m]
Besselův	111120,61960	15988,63853	16,72995	0,02178	$3{,}07731.10^{-5}$
Krasovského	111134,86108	16036,48027	16,82807	0,02198	$3{,}11311.10^{-5}$
WGS84	111132,95255	16038,50866	16,83261	0,02198	$3{,}11485.10^{-5}$

Pro zeměpisnou šířku pólu (φ = 90°) bude délka zemského kvadrantu:

Besselův elipsoid	10 000 855,764 metrů,
Krasovského elipsoid	10 002 137,497 metrů,
elipsoid WGS84	10 001 965,729 metrů.

Proč tak „skoro kulatá“ hodnota?

Pro určení délky metru jako desetimiliónté části zemského kvadrantu stanovil Delambre roku 1793 rozměry elipsoidu, jehož délka kvadrantu byla 10 000 000 metrů.

Délka oblouku rovnoběžky: $s_r = N \cos\varphi(\lambda_2 - \lambda_1)$

Metr

etalon metru

1983 – metr je vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu během časového intervalu 1/299 792 458 sekundy

Izometrické souřadnice na elipsoidu

Pro některá zobrazení, zejména konformní, se na referenčním elipsoidu definují **izometrické souřadnice**.

Izometrické souřadnice - čtverec délkového elementu lze vyjádřit jako součet čtverců délkových elementů v jednotlivých souřadnicových osách, případně ještě vynásobený vhodnou funkcí obou souřadnic.

Pro zeměpisné souřadnice to neplatí. Zatímco dφ je vždy stejné, tak dλ se směrem k pólu zmenšuje.
Pro dφ = dλ vznikne na elipsoidu vznikne síť obdélníčků.

$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$$

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{M^2 d\varphi^2}{N^2 \cos^2 \varphi} + d\lambda^2 \right)$$

dosadíme diferenciál izometrické šířky:

$$dq = \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi}$$

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi \left(dq^2 + d\lambda^2 \right)$$ odpovídá podmínce výše

Pro dq = dλ vznikne na elipsoidu síť čtverců jejichž velikost se s rostoucí φ zmenšuje.

Izometrické souřadnice na elipsoidu

Výpočet izometrické šířky:

$$q=\int_0^{\varphi}\frac{M d\varphi}{N\cos\varphi}=\int_0^{\varphi}\frac{\left[\dfrac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}\right]d\varphi}{\left[\dfrac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}\right]\cos\varphi}=\int_0^{\varphi}\frac{(1-e^2)d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi}=$$

$$\int_0^{\varphi}\frac{(1-e^2\sin^2\varphi-e^2\cos^2\varphi)d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi}=\int_0^{\varphi}\frac{(1-e^2\sin^2\varphi)d\varphi-e^2\cos^2\varphi d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi}=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}-e\int_0^{\varphi}\frac{e\cos\varphi d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)}$$

$$\boxed{\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\ln tg\left(\frac{\varphi}{2}+45°\right)}$$

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$ *substituce x=esin*φ $$e\int_0^{\varphi}\frac{d(e\sin\varphi)}{(1-e^2\sin^2\varphi)}=\frac{e}{2}\ln\frac{1+e\sin\varphi}{1-e\sin\varphi}$$

$$\boxed{e\int_0^{\varphi}\frac{e\cos\varphi d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)}=e\int_0^{\varphi}\frac{d(e\sin\varphi)}{(1-e^2\sin^2\varphi)}}$$

Izometrické souřadnice na elipsoidu

$$q = \ln tg\left(\frac{\varphi}{2} + 45°\right) - \frac{e}{2}\ln\frac{1 + e\sin\varphi}{1 - e\sin\varphi}$$

$$q = \ln\left[tg\left(\frac{\varphi}{2} + 45°\right)\left(\frac{1 - e\sin\varphi}{1 + e\sin\varphi}\right)^{e/2}\right]$$

Součástí vzorce je e.
Různé na různých elipsoidech.

Izometrické souřadnice na elipsoidu (q, λ).

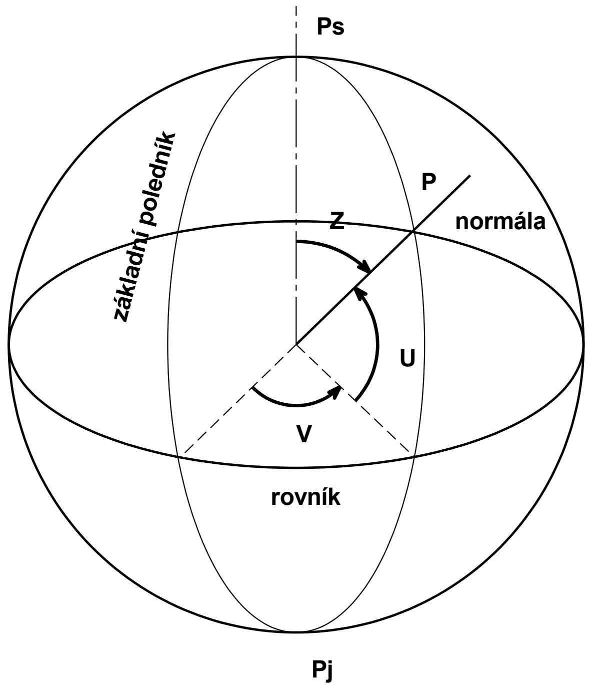
Izometrická šířka na elipsoidu WGS84

φ°	q (rad)	q°
0	0,00000	0,00
10	0,17426	9,98
20	0,35409	20,29
30	0,54596	31,28
40	0,75860	43,46
50	1,00555	57,61
60	1,31115	75,12
70	1,72911	99,07
80	2,42964	139,21
90	∞	∞

Souřadnicové soustavy – koule

Zeměpisné souřadnice sférické nebo kulové:

- **zeměpisná šířka U** (také označovaná jako „na kouli“, sférická, kulová)
- **zeměpisná délka V** („na kouli“, sférická, kulová)
- oblasti blízké pólům - **zenitový úhel Z** (Z = 90°- U)



Normála vychází ze středu.

Souřadnicové soustavy – koule

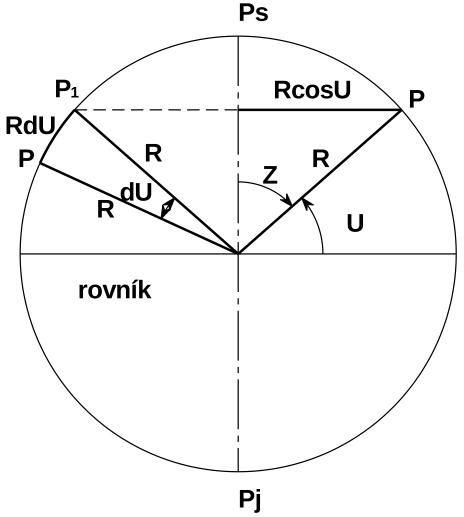
Elementy poledníků a rovnoběžek

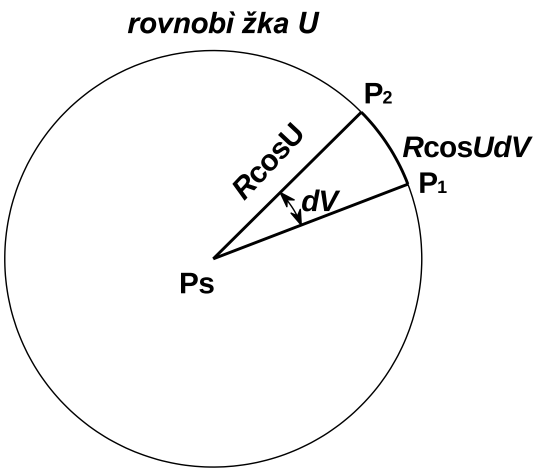
$$ds_p = RdU$$

$$ds_r = R\cos U dV$$

$$ds_p = RdZ$$

$$ds_r = R\sin ZdV$$





Izometrické souřadnice na kouli

Pro některá zobrazení, zejména konformní, se na kouli definují **izometrické souřadnice (Q, V)**.

$$Q = \ln tg\left(\frac{U}{2} + 45°\right)$$

Izometrická šířka na kouli

U°	***Q* (rad)**	***Q°***
0	0,00000	0,00
10	0,17543	10,05
20	0,35638	20,42
30	0,54931	31,47
40	0,76291	43,71
50	1,01068	57,91
60	1,31696	75,46
70	1,73542	99,43
80	2,43625	139,59
90	∞	∞

Kartografické souřadnice na kouli

Na referenční kouli je možno definovat soustavu **kartografických souřadnic** vztaženou ke **kartografickému pólu K**.

Použití při **šikmém zobrazení** (oblique projection).

Poloha kartografického pólu se volí podle potřeb konkrétního zobrazení koule do roviny.

Kartografické souřadnice a základní prvky:

- **kartografická šířka Š**
- **kartografická délka D**
- kartografické poledníky jsou tzv. **hlavní kružnice** (ortodromy) a jejich rovina vždy prochází středem referenční koule
- **základní kartografický poledník** – zpravidla zeměpisný poledník procházející kartografickým pólem

Sférická trigonometrie

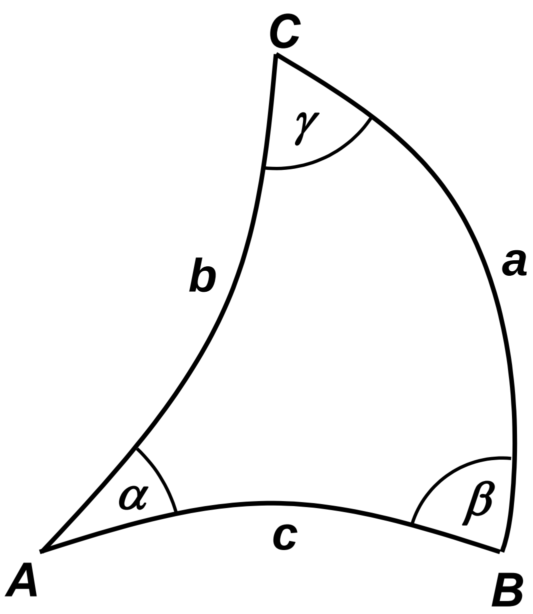
Vztahy mezi zeměpisnými a kartografickými souřadnicemi obecného bodu P se odvozují ze sférické trigonometrie, používají se věty **kosinová pro strany** a **sinová**.

Sinová věta

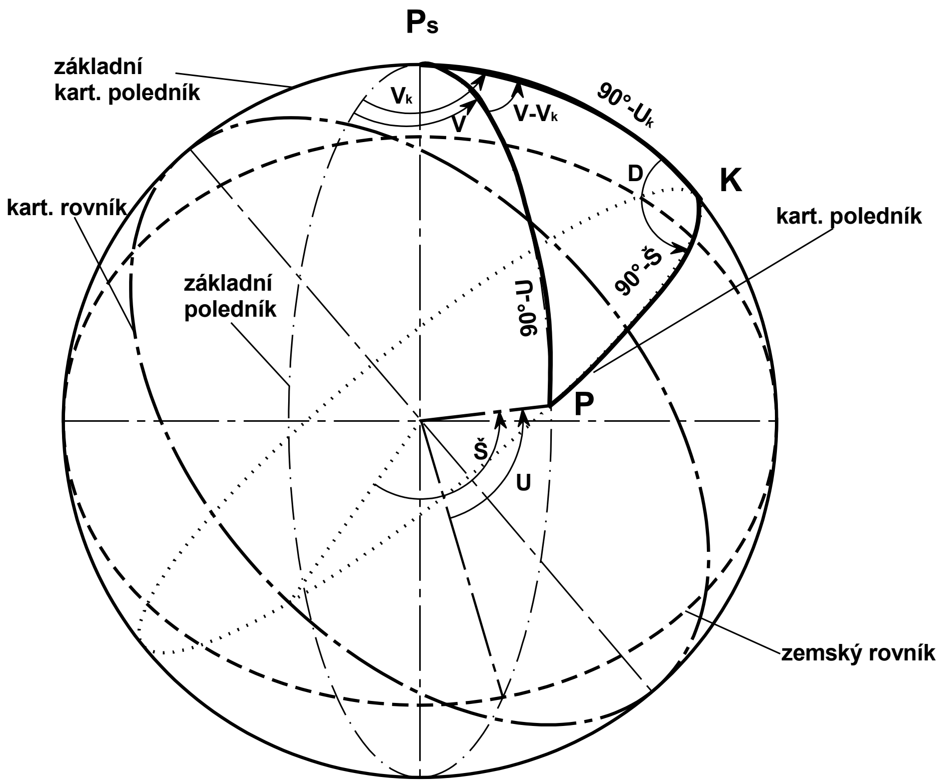
$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

Kosinová věta pro strany

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$$



Kartografické souřadnice na kouli



Výpočet kartografických souřadnic:

$$\sin \check{S} = \sin U \sin U_k + \cos U \cos U_k \cos(V - V_k)$$

$$\sin D = \frac{\cos U}{\cos \check{S}} \sin(V - V_k)$$

Výpočet zeměpisných souřadnic:

$$\sin U = \sin \check{S} \sin U_k - \cos \check{S} \cos U_k \cos D$$

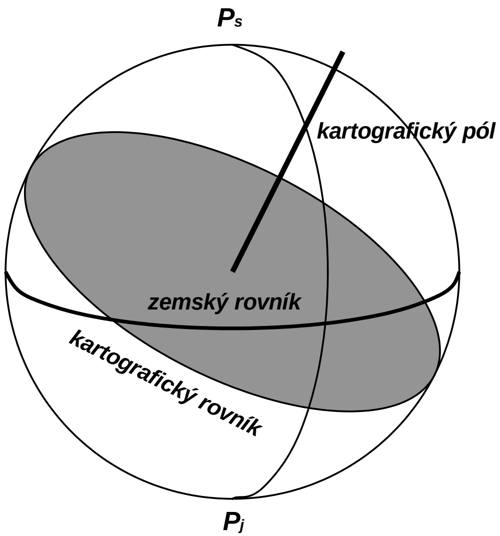
$$\sin(V - V_k) = \frac{\sin D \cos \check{S}}{\cos U}$$

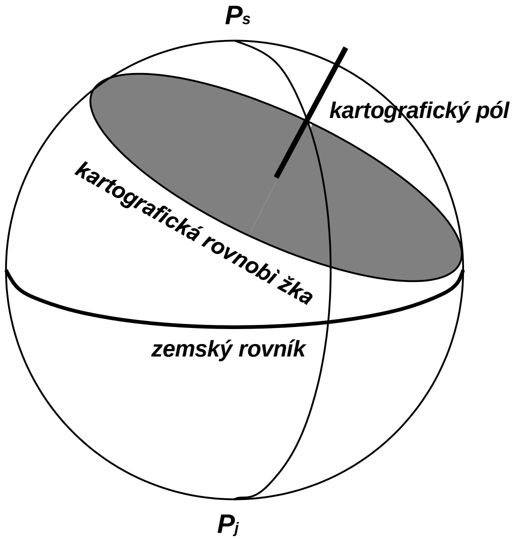
Kartografické souřadnice na kouli

Určení polohy kartografického pólu K:

- **ze dvou bodů** ležících na **budoucím kartografickém rovníku** (ortodromě procházející zpravidla osou zobrazovaného území)
- **ze tří bodů**, pokud osa zobrazovaného území leží na **budoucí kartografické rovnoběžce**

Výchozí body definují rovinu, která protne povrch koule v kružnici.

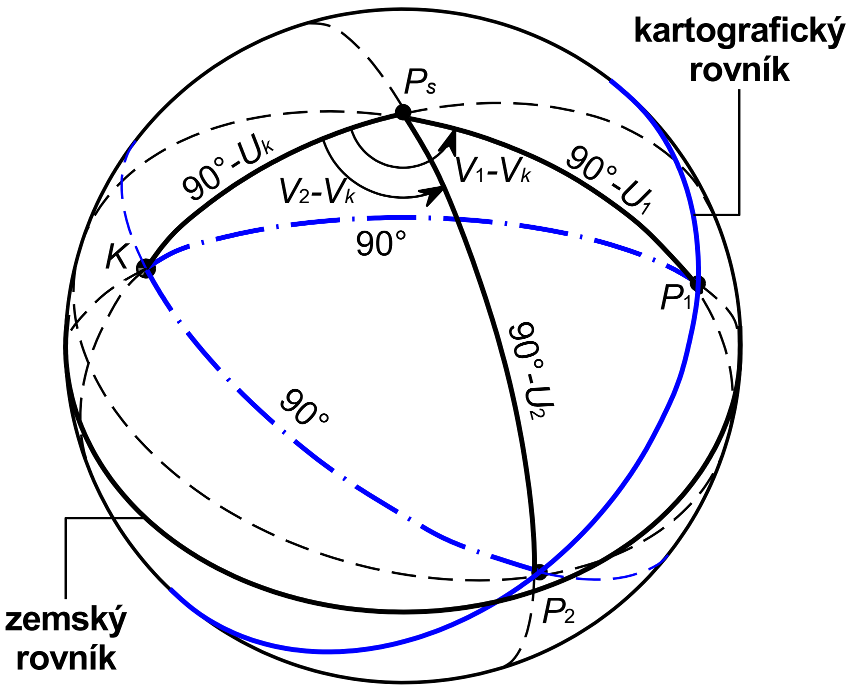




Výpočet polohy kartografického pólu – 2 body

$$\cos 90° = \sin U_1 \sin U_k + \cos U_1 \cos U_k \cos(V_1 - V_K)$$

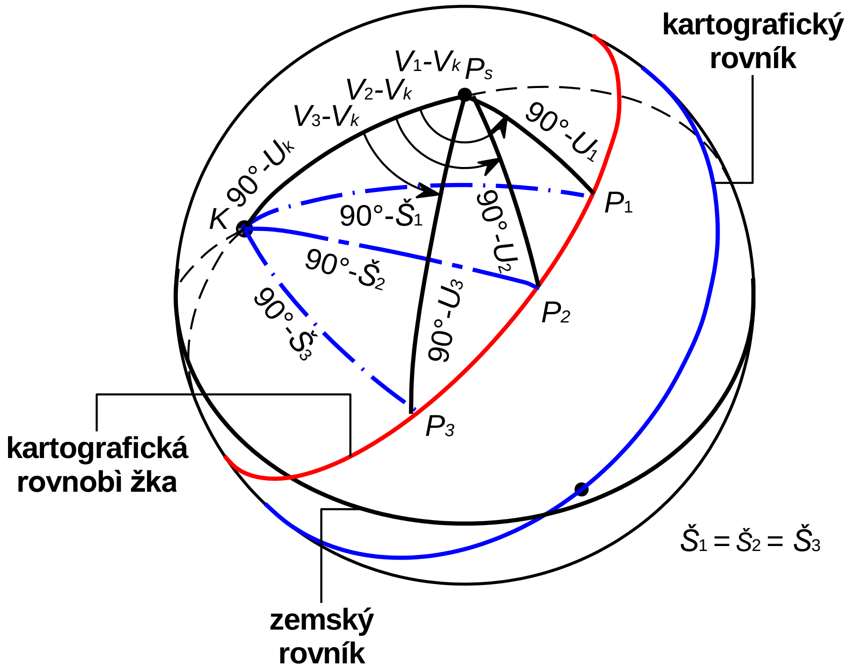
$$\cos 90° = \sin U_2 \sin U_k + \cos U_2 \cos U_k \cos(V_2 - V_K)$$



$$tgV_k = \frac{tgU_1 \cos V_2 - tgU_2 \cos V_1}{tgU_2 \sin V_1 - tgU_1 \sin V_2}$$

$$\cot gU_k = -\frac{tgU_1}{\cos(V_1 - V_k)} = -\frac{tgU_2}{\cos(V_2 - V_k)}$$

Výpočet polohy kartografického pólu – 3 body



$$tgV_k = \frac{(\cos U_1 \cos V_1 - \cos U_3 \cos V_3)(\sin U_1 - \sin U_2) - (\cos U_1 \cos V_1 - \cos U_2 \cos V_2)(\sin U_1 - \sin U_3)}{(\cos U_1 \sin V_1 - \cos U_2 \sin V_2)(\sin U_1 - \sin U_3) - (\cos U_1 \cos V_1 - \cos U_3 \cos V_3)(\sin U_1 - \sin U_2)}$$

$$tgU_k = \frac{\cos U_2 \cos(V_k - V_2) - \cos U_1 \cos(V_k - V_1)}{\sin U_1 - \sin U_2} = \frac{\cos U_3 \cos(V_k - V_3) - \cos U_1 \cos(V_k - V_1)}{\sin U_1 - \sin U_3}$$

Souřadnicové soustavy – zobrazovací rovina

Převážně se používá **pravoúhlá souřadnicová soustava** (Cartesian coordinate system):

- počátek
- osy X, Y; E, N; H, R…

V této soustavě mohou být řešené i všechny úlohy praktické geodézie a kartografie za použití vzorců analytické geometrie v rovině.

Pozor na orientaci os a pořadí záznamu souřadnic.

Někdy je výhodnější nejprve použít **polárních souřadnic** (polar coordinates) v rovině:

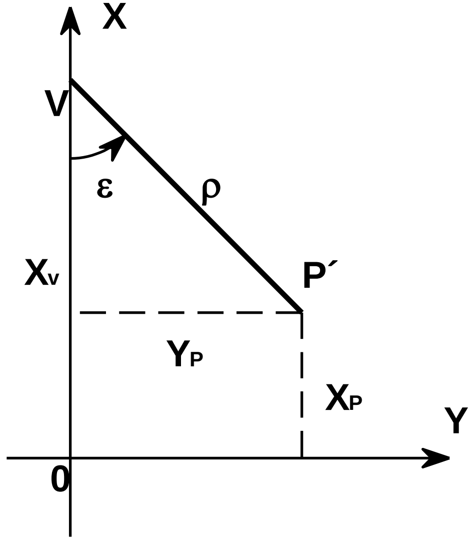
- ρ je průvodič zobrazovaného bodu P´ od počátku V
- ε je polární úhel měřený od osy X
- Počátek polární soustavy se volí vždy na ose X soustavy pravoúhlé.

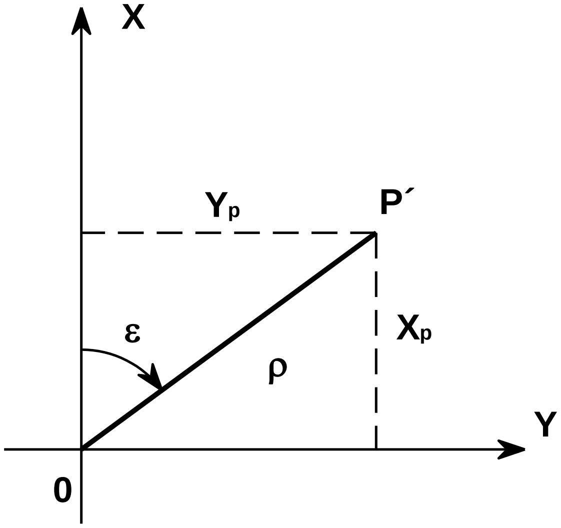
V praxi se používají dvě základní řešení – s různými a totožnými počátky obou soustav.

Souřadnicové soustavy – zobrazovací rovina

$$x = x_v - \rho \cos \varepsilon$$
$$y = \rho \sin \varepsilon$$

$$x = \rho \cos \varepsilon$$
$$y = \rho \sin \varepsilon$$





Kdy se používá který typ?

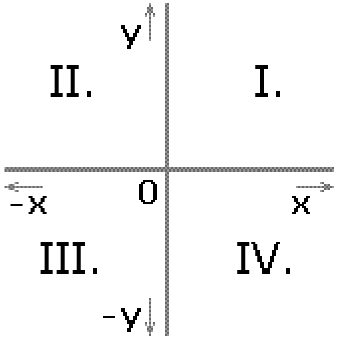
Rozdílné počátky polární a pravoúhlé soustavy: kuželová zobrazení.

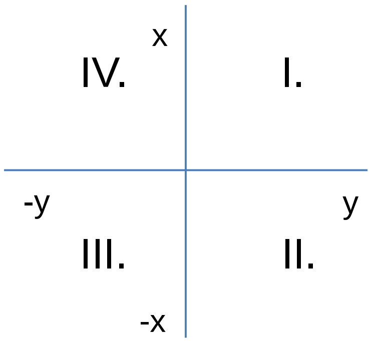
Totožné počátky polární a pravoúhlé soustavy: azimutální zobrazení.

Souřadnicové soustavy – zobrazovací rovina

matematika = x směřuje doprava a y nahoru. Kvadranty jsou proti směru hodinových ručiček. Takže IV. je pod I.

matematická kartografie = x směřuje nahoru a y doprava. Kvadranty jsou ve směru hodinových ručiček. Takže IV. je vlevo od I.





Některé systémy navíc vypadají zcela odlišně nebo nemají osy x a y:

- UTM má osu N (north) a E (east).
- Němci mají R (rechts) a H (hinauf = „ven“).
- Křovák má y doleva a x dolů.

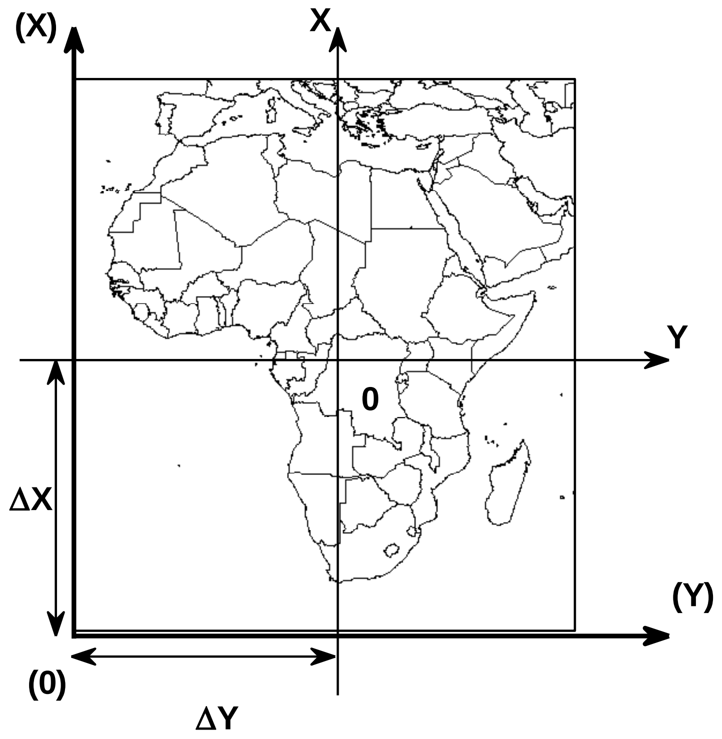
Souřadnicové soustavy – zobrazovací rovina

Počátek rovinných souřadnicových soustav se zpravidla volí uprostřed zobrazovaného území. Aby zkreslení bylo minimální.

Z hlediska konstrukce map, jejich používání nebo používání prostorových geoinformací je však výhodné, aby celé území leželo pouze v 1. kvadrantu.

Proto se často k vypočteným souřadnicím přičítají vhodné adiční konstanty:

- Δx (false northing)
- Δy (false easting)



3

DŮLEŽITÉ KŘIVKY NA REFERENČNÍ PLOŠE

Důležité křivky na referenční ploše

- Využití při navigaci, námořní či letecké dopravě.
- Ve vybraných kartografických zobrazeních se zobrazují jako přímky.
- Používáno např. v minulosti pro námořní navigaci.

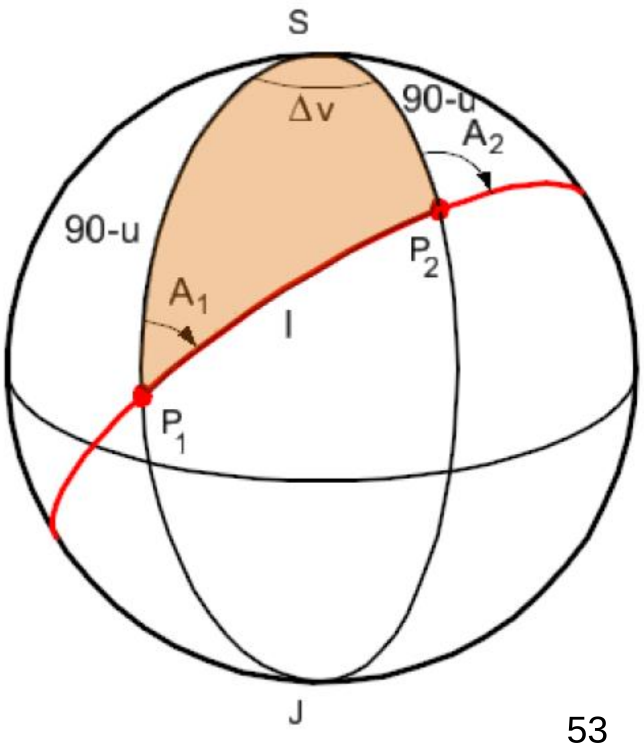
- Geodetická křivka (na elipsoidu)
- Ortodroma
- Loxodroma

Geodetická křivka na elipsoidu

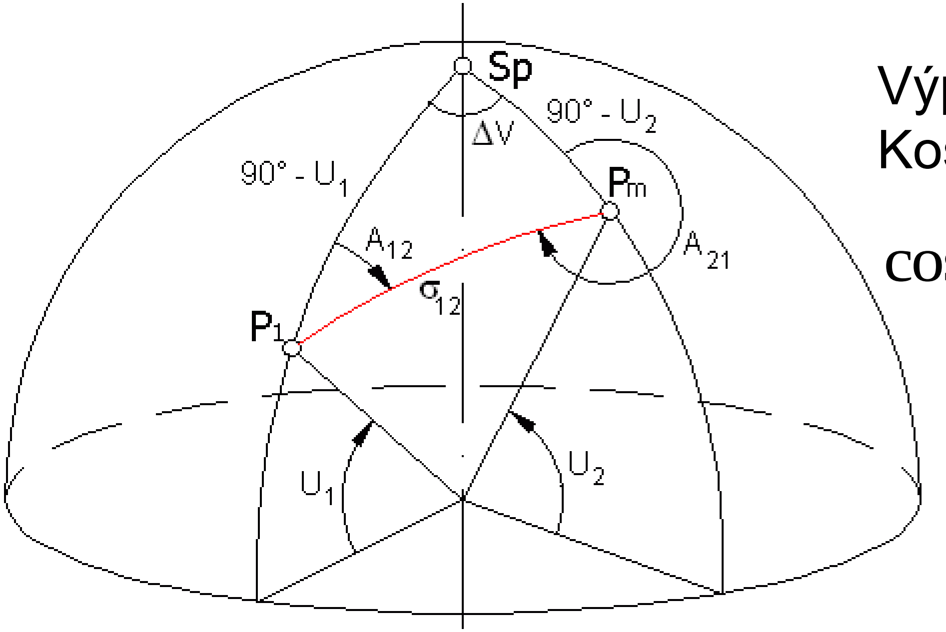
- Nejkratší spojnice dvou bodů na elispoidu.
- Poledníky protíná pod různými azimuty.
- Na rozdíl od ortodromy na kouli se nevrací do původního bodu.

Ortodroma

- geodetická křivka - řeší se většinou na kulové ploše
- vyjadřuje ortodromickou vzdálenost - nejkratší vzdálenost dvou bodů na ploše
- protíná poledníky pod různými azimuty
- vrací se do bodu ze kterého vychází - jedná se o hlavní kružnici (střed kružnice je ve středu koule)
- její délka je vždy kratší než délka loxodromy
- gnómonická projekce - ortodroma je přímka



Ortodroma



Výpočet pomocí sférického trojúhelníku.
Kosinová věta pro strany:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

dosazením hodnot zeměpisných šířek získáme vztah:

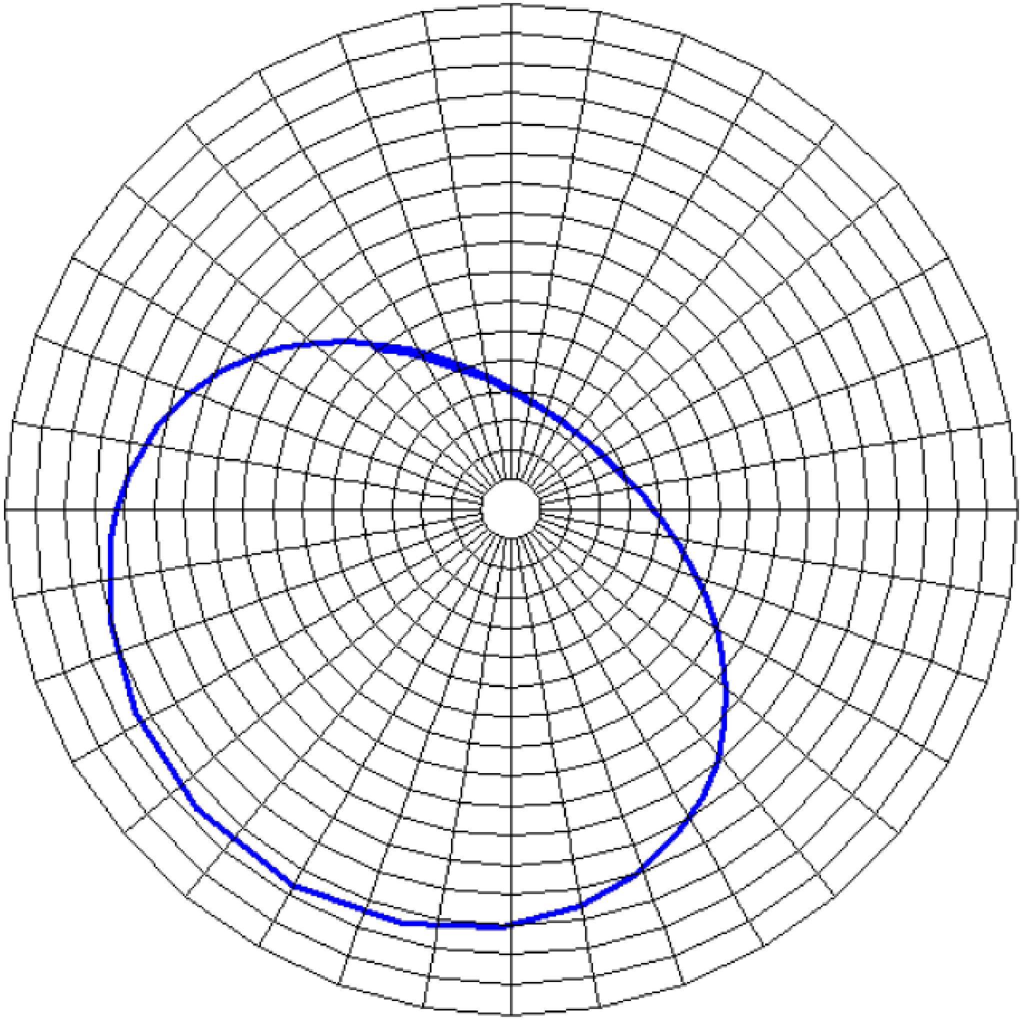
*cos c = cos (90° - U_1) * cos (90° - U_2) + sin (90° - U_1) * sin (90° - U_2) * cos ΔV*

hodnota c vyjde ve stupních

výsledná délka ortodromy se vypočítá ze vztahu:

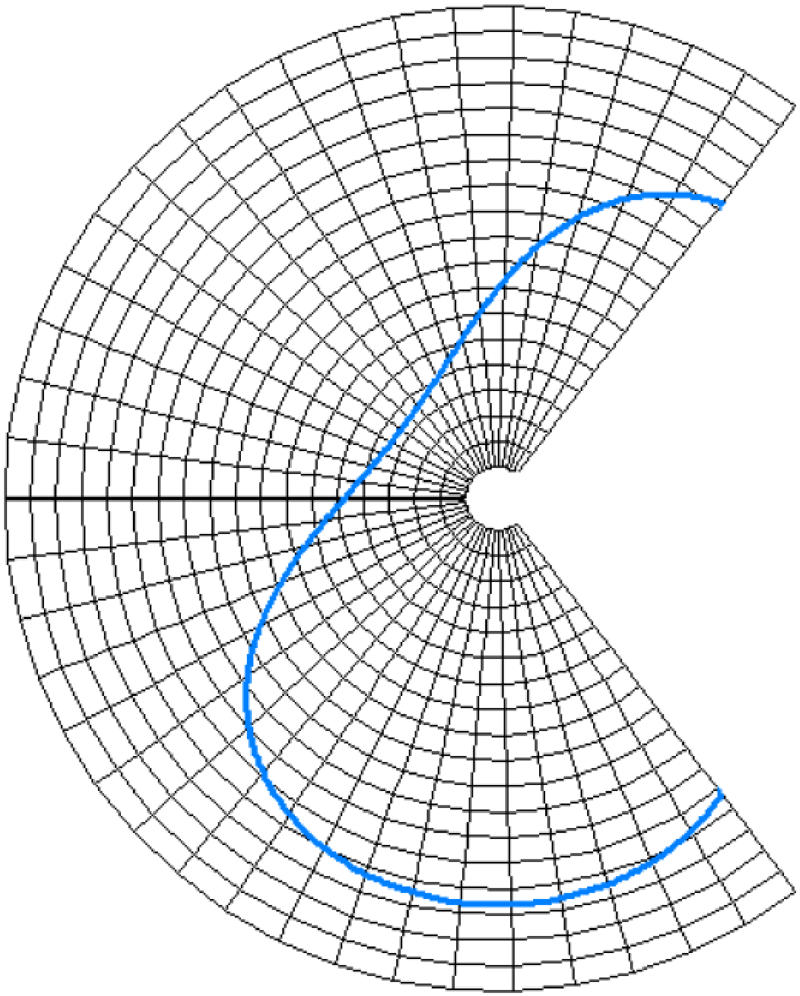
*d = 2πR * c / 360*

Ortodroma



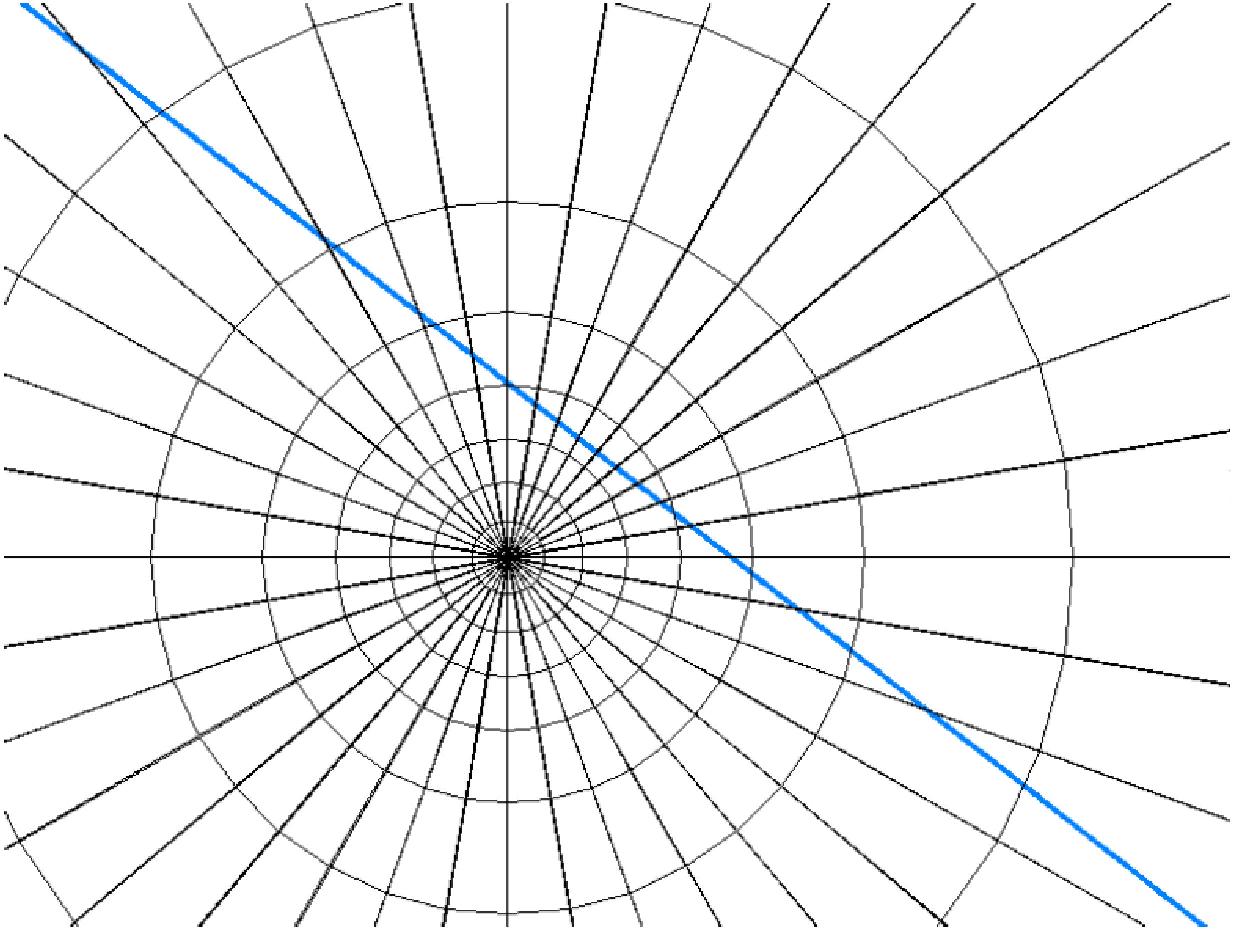
Znázornění ortodromy v azimutálním zobrazení.

Ortodroma



Znázornění ortodromy v kuželovém zobrazení.

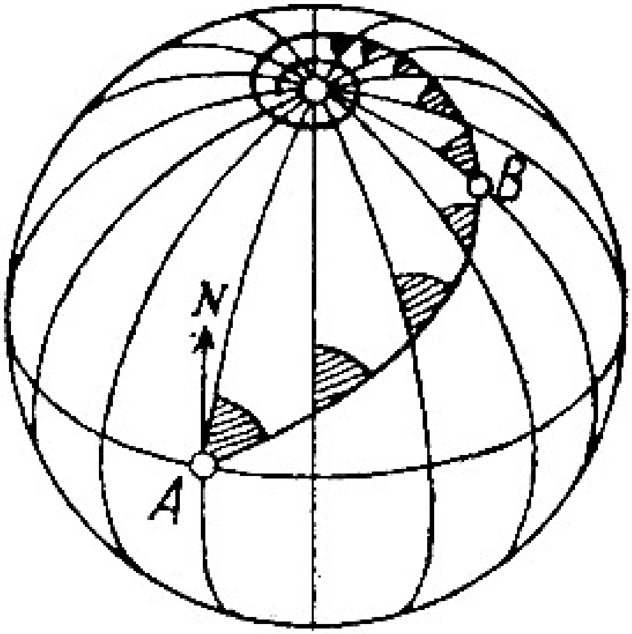
Ortodroma



Znázornění ortodromy v gnómonické projekci – přímka.

Loxodroma

- křivka ano, ale ne geodetická
- křivka na referenční ploše, která protíná všechny poledníky pod stále stejným úhlem – azimutem A
    - snadná navigace
- zpravidla se řeší na kouli
- spirálovitě se blíží k pólům ale nedosáhne jich – délka nekonečná
- obecná křivka (kromě vybraných zobrazení)
    - Mercatorovo zobrazení (konformní válcové) – loxodroma je zde přímka



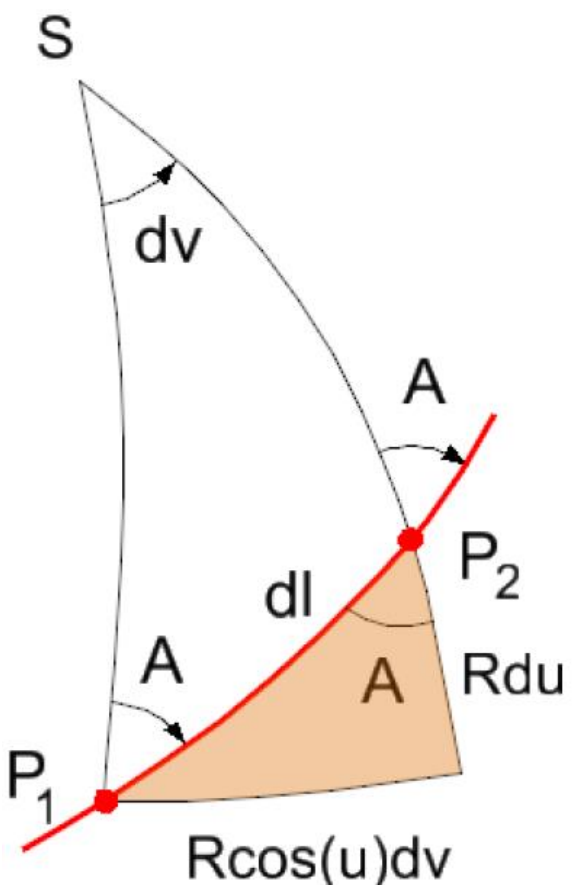
Loxodroma

Výpočet délky loxodromy:

1) výpočet azimutu

2) výpočet délky loxodromy

Počáteční bod loxodromy… P1
Koncový bod loxodromy… P2
Azimut loxodromy… A
Délka loxodromy… dl



Loxodroma

1. Výpočet azimutu loxodromy

- při správném určení azimutu záleží na pořadí bodů - je nutné rozlišit počáteční a koncový bod

- souřadnice se musí dosadit včetně znamének (j.š. a z.d. se dosazují záporné)

- pokud je člen $|\lambda_B - \lambda_A| > 180°$, musí se použít doplněk do 360°, který podmínku splní, a to s opačným znaménkem.

  – např. místo 290° se dosadí -70°, místo -190° dosadíme 170°

- délka loxodromy je samozřejmě stejná v obou směrech, ale při výpočtu její délky záleží na počátečním azimutu

Loxodroma

$$\tan A_0 = \frac{\lambda_B - \lambda_A}{ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\varphi_B}{2} + 45°\right)}{\tan\left(\frac{\varphi_A}{2} + 45°\right)}\right)} * \frac{\pi}{180°}$$

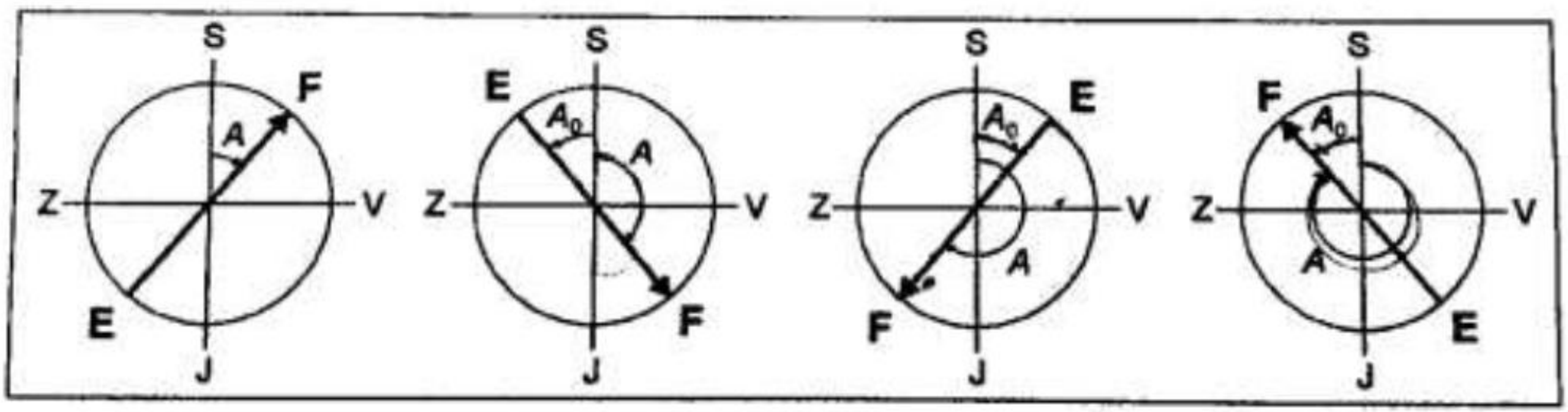
Tímto se určí hodnota úhlu A_0, který leží v intervalu (-90°; 90°).

Protože se ale azimut měří v intervalu <0°, 360°>, je nutné hodnotu A_0 opravit podle vzájemné polohy bodů A a B (resp. podle toho jakým směrem loxodromu počítáme).

Loxodroma

Korekce se provádí následovně (A je výsledný azimut, E a F jsou body):

$A = A_0$ | $A = A_0 + 180°$ | $A = A_0 + 180°$ | $A = A_0 + 360°$



Př.: $A_0 = 40°$, $A = 40°$ | $A_0 = -40°$, $A = 140°$ | $A_0 = 40°$, $A = 220°$ | $A_0 = -40°$, $A = 320°$

Pokud počítám loxodromu ve směru z JZ na SV, pak $A_0 = A$.
Pokud je směr loxodromy ze SZ na JV, pak se k zjištěnému A_0 přičte 180°.
…

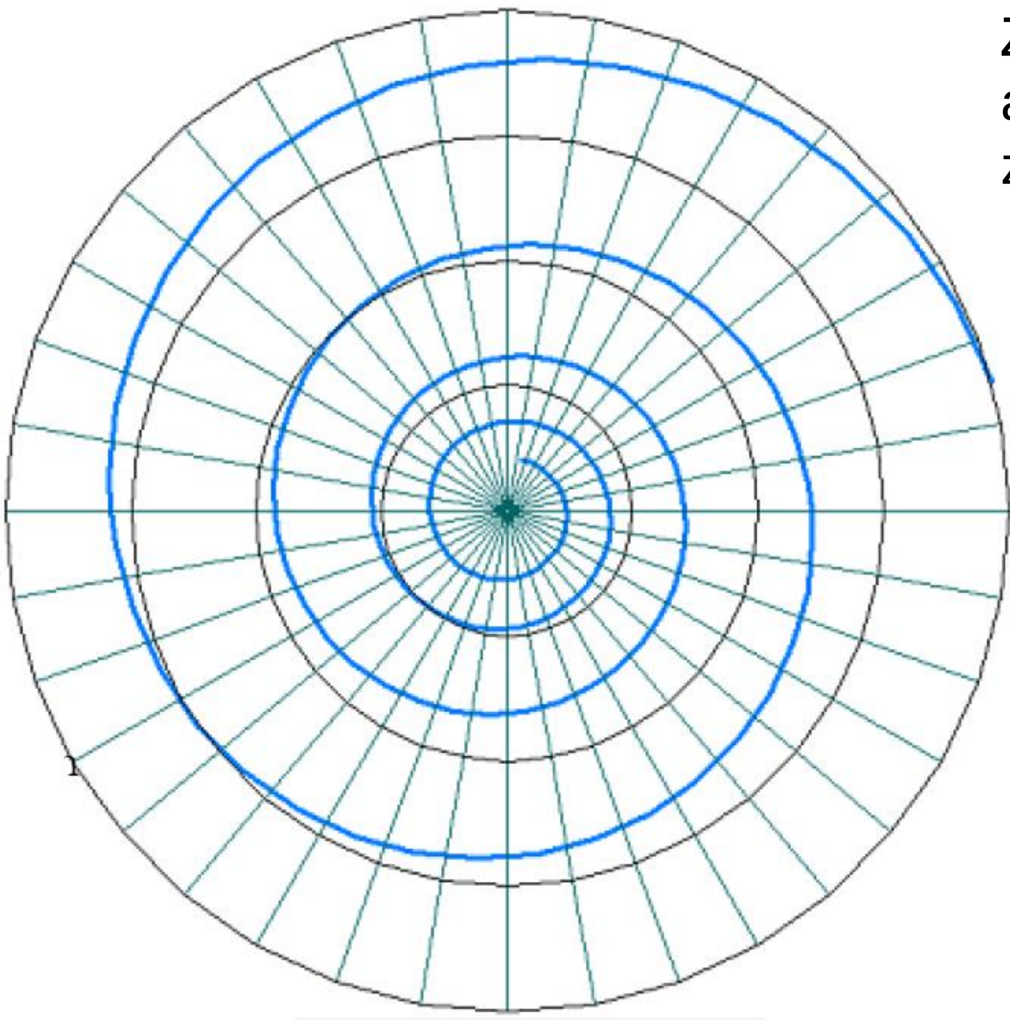
Loxodroma

2. Délka loxodromy

nakonec se vypočítá dosazením A do vztahu:

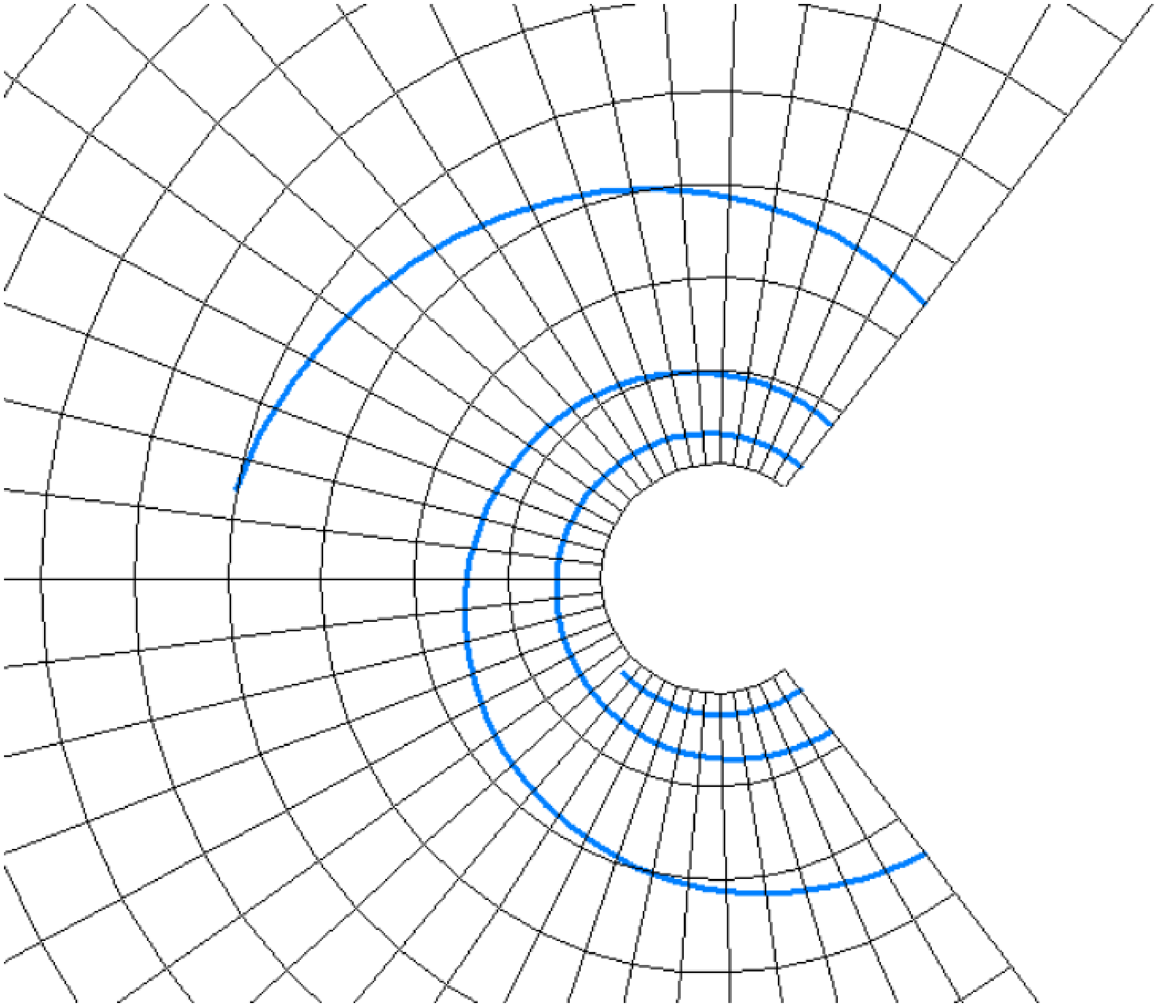
$$\boxed{\mathrm{d_{AB}} = \frac{\mathrm{r_Z}}{\cos \mathrm{A}} * (\varphi_\mathrm{B} - \varphi_\mathrm{A}) * \frac{\pi}{180°}}$$

Loxodroma



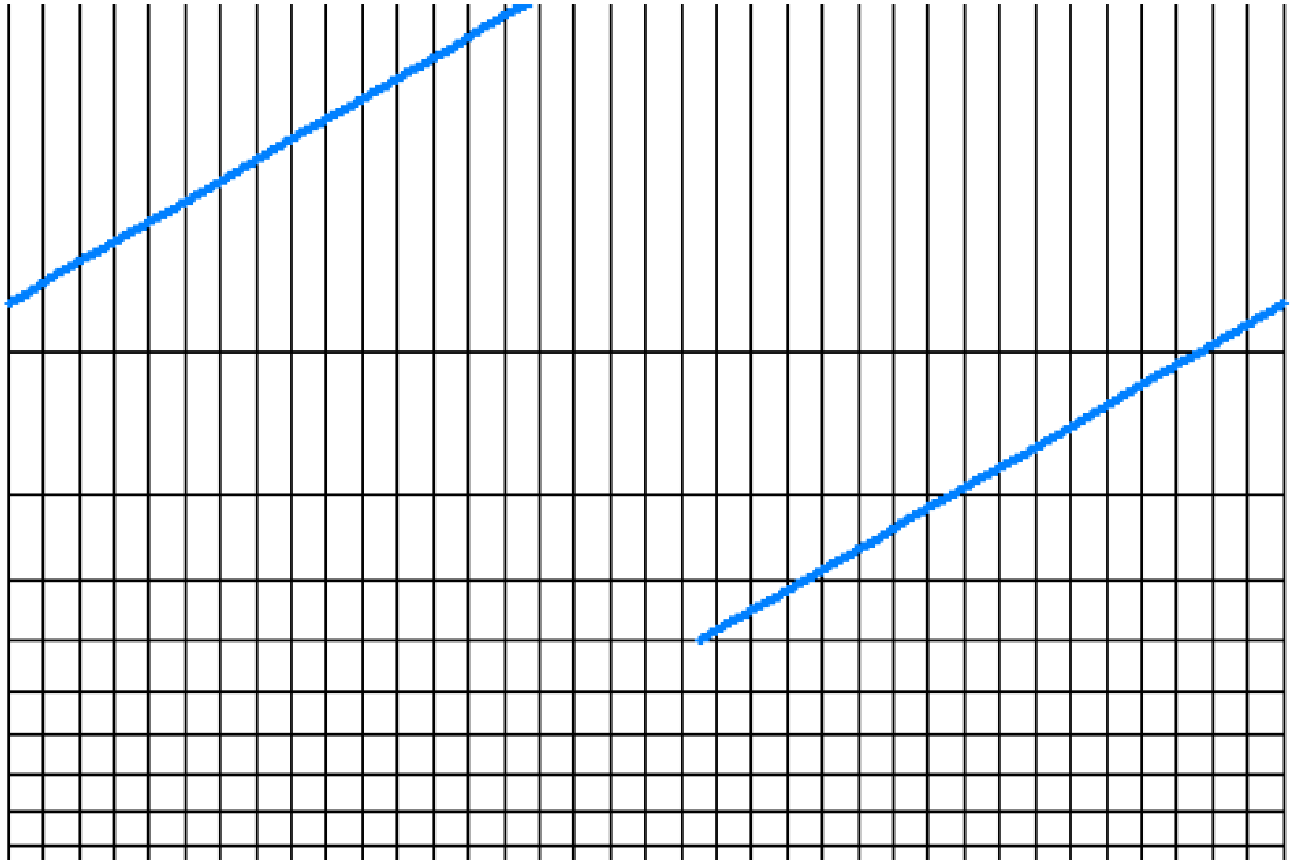
Znázornění loxodromy v azimutálním ekvidistantním zobrazení.

Loxodroma



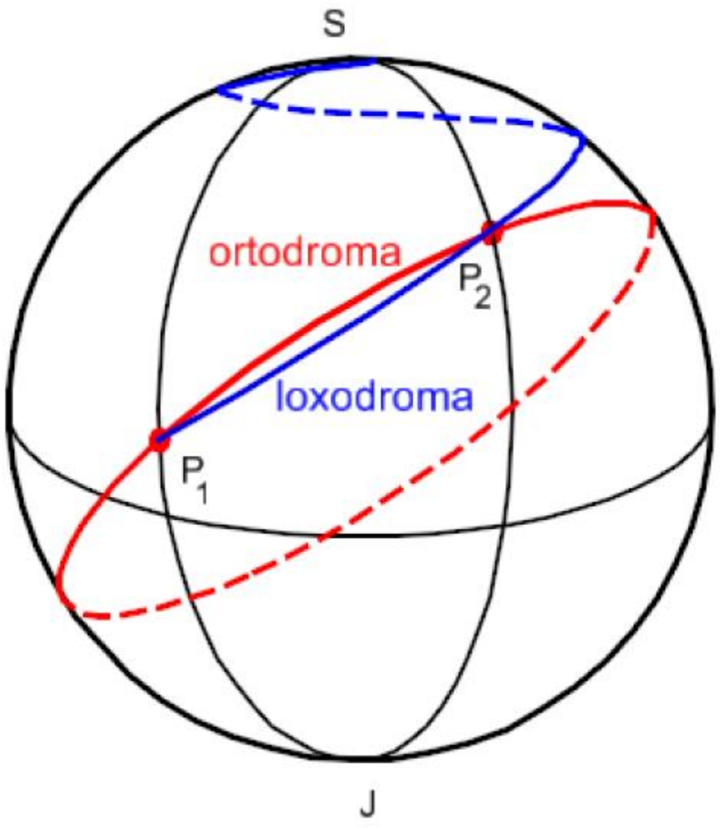
Znázornění loxodromy v kuželovém ekvidistatním zobrazení.

Loxodroma



Znázornění loxodromy v Mercatorově konformním válcovém zobrazení.

Loxodroma x ortodroma



Ortodroma

Měření na webových mapách.